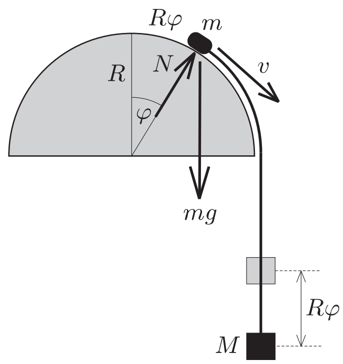
Megoldás. Legyen a m tömegű testet a félgömb középpontjával összekötő egyenes és a függőleges szöge φ. Eddig a helyzetig a félgömbről $R\varphi$ hosszúságú fonál futott le, ennyivel került lejjebb a M tömegű test; a m tömegű test függőleges elmozdulása pedig $R(1-\cos\varphi)$.



A testek v sebessége (ami a fonál okozta kényszer miatt a két testre ugyanakkora) az energiamegmaradás törvényéből számítható ki:

(1) $$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = MgR\varphi + mgR(1-\cos\varphi), v^2 = 2gR\frac{M\varphi + m(1-\cos\varphi)}{M+m}.$$

Legyen a félgömb által a m tömegű testre kifejtett kényszererő N. Ekkor a m tömegű testre vonatkozó Newton-egyenlet radiális irányban:

$$mg\cos\varphi - N = m\frac{v^2}{R}.$$

Amikor a lecsúszó test éppen elválik a félgömbtől, a kényszererő nulla:

$$mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R},$$

ami (1) felhasználásával így írható:

$$mg\cos\varphi = 2mg\frac{M\varphi + m(1-\cos\varphi)}{M+m},$$
$$(M+m)\cos\varphi = 2M\varphi + 2m(1-\cos\varphi),$$

vagyis

(2) $$m(3\cos\varphi - 2) = M(2\varphi - \cos\varphi).$$

a) Az elválás szöge akkor lesz $\varphi = 45^\circ = \pi/4$ radián, ha

$$m\frac{3\sqrt{2}-4}{2} = M\frac{\pi-\sqrt{2}}{2},$$

vagyis a tömegarány:

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} = 7{,}12.$$

b) Ha $m \gg M$, a (2) egyenlet jobb oldala elhanyagolható (nullának vehető), így az elválás szögére $3\cos\varphi - 2 = 0$ adódik, ahonnan

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3} = 48{,}2^\circ.$$

c) Ha $m \ll M$, a (2) egyenlet bal oldala hanyagolható el, ekkor

$$2\varphi - \cos\varphi = 0.$$

Ez az egyenlet csak numerikusan oldható meg, gyökének értéke kb. $\varphi = 25{,}8^\circ$.

A félgömbtől való elválás szöghelyzete tetszőleges tömegaránynál a fenti két érték közé esik.