I. megoldás. A véges méretű „dobozba” zárt m tömegű részecske a kvantumos hatások miatt nem lehet nyugalomban, hanem valamekkora, átlagosan p nagyságú impulzussal rendelkezik. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{1}$$

ahol $\Delta x \approx d$ a neutron helyének bizonytalansága, $\Delta p \approx p$ pedig az impulzus határozatlansága.

Megjegyzések. 1. Az (1) egyenlőtlenség jobb oldalán írhattunk volna h-t, $h/2$-t vagy más, hasonló kifejezést, hiszen csak a bizonytalanság *nagyságrendjét* kívántuk megadni. Pontosabb számértéknek csak akkor lenne értelme, ha megmondanánk, mit is jelent pontosan a hely és az impulzus bizonytalansága, de erre a *nagyságrendi becslésnél* nem törekszünk.

2. Az impulzus átlagos értéke a bezárt részecskénél nyilván nulla, hiszen a neutron nem tud elmozdulni a dobozból. Emiatt az impulzus határozatlansága (az átlagértéktől való eltérése) az impulzus nagyságával becsülhető.

Ezek szerint – (1) határesetét tekintve – a neutron impulzusa

$$p \approx \pm\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{d},$$

a részecske sebessége pedig

$$v \approx \pm\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{md}.$$

Ha ezt az eredményt (jobb híján *klasszikus fizikai* hasonlattal élve) úgy értelmezzük, hogy a részecske ide-oda pattog a doboz szemközti falai között, akkor mondhatjuk: egy kiszemelt falon $\Delta t = \dfrac{2d}{v}$ időközönként $2mv$ impulzusváltozás történik, tehát a részecske a falra

$$F = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{mv^2}{d} = \frac{h^2}{16\,\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^3}$$

nagyságú erőt, azaz

$$p = \frac{F}{d^2} = \frac{h^2}{16\,\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^5} \tag{2}$$

nyomást fejt ki. Numerikusan (SI egységekben számolva)

$$p \approx 1{,}6 \cdot 10^{-42} \cdot \frac{1}{d^5}\ [\mathrm{N\,m^3}],$$

ami meglehetősen kicsiny érték (hacsak a doboz d mérete nem nagyon kicsiny).

II. megoldás. A kvantumelmélet szerint egy d oldalélű dobozba zárt részecske alapállapotát olyan hullámok szorzatával írhatunk le, melyek félhullámhossza a doboz mérete ($\lambda/2 = d$), a megfelelő impulzusok tehát (a de Broglie-féle összefüggésnek megfelelően)

$$p_x = p_y = p_z = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d}. \tag{3}$$

Egy ilyen „kvantumrészecske” energiája (ami jelen esetben tisztán mozgási energia)

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right),$$

vagyis (3) felhasználásával

$$E(d) = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

Képzeljük el, hogy a doboz oldalait óvatosan $\Delta d \ll d$ értékkel lerövidítjük, vagyis a doboz térfogatát

$$\Delta V = d^3 - (d - \Delta d)^3 \approx 3d^2\,\Delta d$$

értékkel lecsökkentjük. Ekkor $W = p \cdot \Delta V$ munkát kell végeznünk, ahol p a keresett nyomás, miközben a részecske energiája $\Delta E = E(d - \Delta d) - E(d)$ mértékben megnő.

Másrészt a munkatétel szerint $W = \Delta E$, vagyis

$$p \cdot 3d^2\,\Delta d = \frac{3h^2}{8m} \cdot \left(\frac{1}{(d - \Delta d)^2} - \frac{1}{d^2}\right) = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{2d\,\Delta d - \Delta d^2}{d^2(d - \Delta d)^2} \approx \frac{3h^2}{4md^3}\,\Delta d. \tag{4}$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\Delta d \ll d$.)

A (4) egyenletből a keresett nyomásra

$$p = \frac{h^2}{4m} \cdot \frac{1}{d^5} \tag{5}$$

adódik, ami nagyságrendileg megegyezik az I. megoldás (2) képletével, tehát azzal egyenértékű *becslésnek* tekinthető.

Megjegyzések. 1. A dobozba zárt részecske energiaszintjei diszkrétek, és d csökkentésével a köztük levő távolság egyre nagyobb lesz. Ha a doboz T hőmérsékletű környezetben van, a kT nagyságrendű termikus gerjesztés kellően kicsi d-re nem elég ahhoz, hogy a neutronokat kitérítse az alapállapotból. Kicsiny d-re tehát a neutron mindig alapállapotban tartózkodik. Ellenkező esetben (vagyis amikor d nem túl kicsi, vagy T viszonylag nagy) a gerjesztett állapotok járulékát is figyelembe kell venni.

2. Klasszikus határesetben, amikor a részecske átlagenergiája $3kT/2$, és ennek megfelelően a sebessége $\sqrt{3kT/m}$, a falakra kifejtett nyomás így számítható ki:

$$p = \frac{3kT}{d^3}.$$

A hőmozgásból származó nyomás szobahőmérsékleten és például 1 nm-es dobozméretnél kb. 100-szor nagyobb, mint a kvantumos eredetű nyomás. Ha viszont még ennél is (sokkal) kisebb méretű dobozba sikerülne bezárni egy neutront, annak kvantumos eredetű nyomása válna meghatározóvá.

3. A kvantumos eredetű nyomás (nagyságrendileg helyes) képletét dimenzionális megfontolásokkal is kitalálhatjuk. A nyomás nyilván függhet a doboz méretétől, a részecske tömegétől és a Planck-állandótól. Ezekből nyomás dimenziójú mennyiséget csak

$$p = \text{állandó} \cdot \frac{h^2}{md^5}$$

módon lehet „kikeverni”, ahol az állandó egy 1 nagyságrendű, dimenziótlan szám.

A *dimenzióanalízis* módszere akkor alkalmazható biztonsággal, ha jó érvekkel meg tudjuk indokolni, hogy a keresett mennyiség mitől *nem* függ! Esetünkben a nyomás – elvben – függhetne a Boltzmann-állandótól, a fénysebességtől, vagy akár a Newton-féle gravitációs állandótól, de ténylegesen nincs kapcsolat a felsorolt állandók és a kvantumos eredetű nyomás között.