

Megoldás. A lopott kocs sebessége 30 m/s, a rendőrautó maximális sebessége pedig $v_{\max} = 45$ m/s. Az üldözött személyautó a szóbanforgó 1500 métert 50 s alatt teszi meg. A rendőrautó 10 s múlva indul el, ezért 40 másodperc alatt kell 1500 méternyi utat megtennie.

A rendőrautónak fel kell gyorsulnia a megadott csúcssebességre. Egy m tömegű autót gyorsító erő (a súrlódási erő) legfeljebb $F = \mu mg$ lehet, ha az ennek megfelelő értéknél nagyobb gázt ad a vezető, akkor az autó kerekei kipörögnek. Ezek szerint a rendőrautó gyorsulása legfeljebb

$$a = \frac{F}{m} = \mu g = 0,4 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

lehet. (Lényeges, hogy az autó négykerék-meghajtású; ha nem ilyen lenne, akkor a gyorsulása csak kb. 2 m/s^2 lehetne.)

Tételezzük fel, hogy a rendőrautó egyenletesen gyorsulva éri el a csúcssebességét, majd a továbbiakban egyenletesen, állandó sebességgel halad. A felgyorsuláshoz

$$t_1 = \frac{v_{\max}}{a} = \frac{45 \text{ m/s}}{3,92 \text{ m/s}^2} \approx 11,5 \text{ s}$$

időre van szüksége, és ezalatt

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{3,92}{2} 11,5^2 \text{ m} \approx 260 \text{ m}$$

utat tesz meg.

A maradék $t_2 = 40 - 11,5 = 28,5$ másodperc alatt a 45 m/s sebességgel haladó rendőrautó

$$s_2 = v_{\max} t_2 \approx 1280 \text{ m}$$

utat tesz meg.

Mivel $s_1 + s_2 = 1540 \text{ m}$ több, mint a város távolsága, a rendőrautó utoléri a lopott gépkocsit.

Megjegyzés. A fenti megoldás a légellenállást nem veszi figyelembe, pedig az növekvő sebességeknél egyre nagyobb szerepet kap. A megoldás során feltételeztük, hogy a rendőrautó motorjának még a csúcssebességét majdnem elérő sebességeknél is van akkora „tartalék” teljesítménye, hogy a μg gyorsítást létrehozassa, majd a 45 m/s-os sebesség elérésénél ezt a teljesítményt a vezető valamilyen megfontolásból lecsökkenti. Ez azonban nem életszerű, hiszen a rendőrautóban nincs beépített sebességkorlátozó berendezés, és a vészhelyzetben intézkedő rendőrök a KRESZ által (a „közönséges” járművekre vonatkozó) megengedett sebességet már úgylis jócskán túllépték.

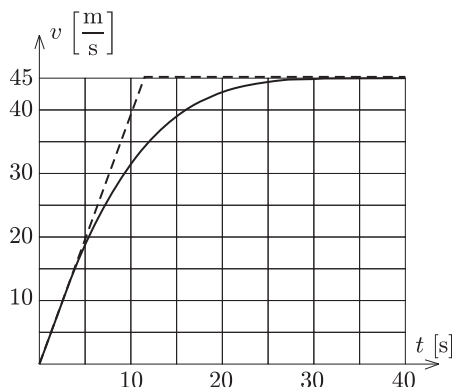
Reálisabb feltételezés, hogy a gépkocsi sebességét nem a vezető döntése, hanem fizikai hatások, nevezetesen a közegellenállás, továbbá a növekvő fordulatszámval erősen csökkenő motorteljesítmény korlátozza. Ez azonban annyit jelent, hogy a gépkocsi gyorsulása kezdettől fogva nem állandó, hanem a sebesség növekedésével egyre csökken, és $v = v_{\max}$ értéknél nullává válik. Ennek a – változó gyorsulású – mozgásnak részletes elemzése felsőbb matematikai ismereteket igényel, és természetesen nem várható el a középiskolás megoldóktól.

Ha a gépkocsi gyorsulásának csökkenését a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erőnek tulajdonítjuk, akkor az

$$a(v) = \mu g \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right)$$

mozgásegyenletet írhatjuk fel. (Az arányossági tényezőket úgy választottuk meg, hogy kis sebességnél az ismert μg , $v = v_{\max}$ -nál pedig nulla legyen a gyorsulás.)

Ezt az egyenletet – ami egy differenciálegyenlet, hiszen a $v(t)$ sebesség és annak változási üteme (differenciálhányadosa) között teremt kapcsolatot – felsőbb matematikai eszközökkel, vagy pl. numerikusan, kicsiny lépések sorozatával lehet megoldani. Az *ábrán* a számítógéppel kapott megoldást folytonos vonal jelöli, míg az egyenletesen gyorsuló + egyenletes mozgást (ez szerepelt a középiskolás eszközökkel végigszámolható megoldásban) szaggatott vonal ábrázolja.



A rendőrautó által megtett út a görbe alatti területtel egyenlő. Ez a szaggatott vonalnál – mint láttuk – *kicsit nagyobb*, mint másfél km, a folytonos vonal esetében pedig *kicsit kisebb* annál. (Ez pl. a „kis téglalapok” leszámolásával és interpolálással is látható.) Ha tehát a rendőrautó mozgását az itt leírt modell jól írja le, akkor a feltett kérdésre adható válasz: *nem fogja utolérni* az ellopott gépkocsit a város határa előtt.