Megoldás. *Adottak:*

$$m = 500\ \mathrm{kg}, \quad h = 400\ \mathrm{km} = 4\cdot 10^5\ \mathrm{m},$$
$$r_1 = R + h, \quad r_2 = R + \frac{h}{2},$$
$$F_{\text{lég}} = K\varrho v^2\ (\text{ahol } K = 0{,}23\ \mathrm{m}^2), \quad \Delta r = -\varepsilon\ (= -100\ \mathrm{m}).$$

Táblázatból vehető a Föld egyenlítői R sugara, M tömege és a gravitációs törvényben szereplő γ állandó:

$$R = 6378\ \mathrm{km} = 6{,}378\cdot 10^6\ \mathrm{m},$$
$$M = 5{,}974\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg},$$
$$\gamma = 6{,}673\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^2).$$

a) A feladatban megfogalmazott feltételek szerint „a műholdak a Föld felszínéhez közeledve mindvégig közelítően körpályán haladnak”, ezért jó közelítésben írhatjuk:

$$F_{\text{grav}} = ma_{\text{cp}}, \qquad \gamma\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Ennek alapján

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}},$$

amelybe behelyettesítve r_1 és r_2 értékeit, megkapjuk a két sebességet:

$$v_1 = 7669{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_2 = 7784{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A műhold sebességváltozása tehát

$$v_2 - v_1 = 115{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} > 0.$$

A légellenállás következtében nőtt a műhold sebessége! Szokás ezt űrhajózási paradoxonnak is nevezni. A légellenállási, súrlódási erő munkája szükségképpen negatív, mégis nő a műhold mozgási energiája! Hogyan lehetséges ez? Erre kaphatunk választ a feladat *b*) és *c*) részének megoldása során. Érdemes lesz mindkét esetben abból indulunk ki, hogyan változik meg a műhold mechanikai összenergiája, vagyis a kinetikus és potenciális energia összege. Ez az, ami a légellenállási erő hatására csökkenhet.

b) A légellenállási erő teljesítménye:

$$\vec{F}_{\text{lég}}\cdot\vec{v} = -F_{\text{lég}}\cdot v < 0.$$

Ez egyenlő az összenergia változási sebességével:

$$-F_{\text{lég}}\cdot v = \frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t}. \tag{1}$$

Az összenergia kinetikus és potenciális részből áll:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma\frac{mM}{r}\right).$$

E két rész azonban kifejezhető egymásból. Írjuk fel újra a dinamika alaptörvényét:

$$\gamma\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma\frac{mM}{r} = mv^2,$$

amiből kapjuk:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}(-E_{\text{pot}}).$$

Az összenergiát tehát így is felírhatjuk:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} - 2E_{\text{kin}} = -E_{\text{kin}} < 0.$$

(Az, hogy az összenergia negatív, nem kell, hogy megijesszen senkit, az atomfizikában számos példát látunk erre.)

Most tehát (1) így írható:

$$-F_{\text{lég}}\cdot v = -\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t},$$

illetve

$$F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\Delta t} = mv\frac{\Delta v}{\Delta t} = mv\,a_{\text{t}}.$$

A légellenállásra egy érdekes kifejezést kaptunk:

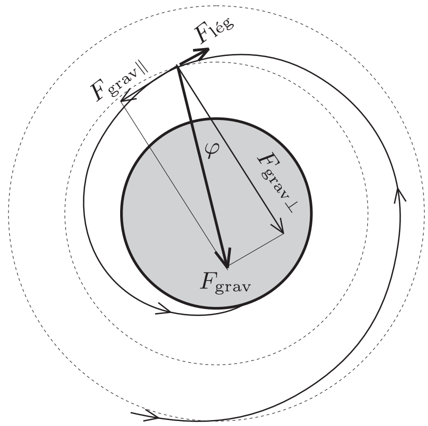
$$F_{\text{lég}} = ma_{\text{t}}. \tag{2}$$

Az ma_{t} kifejezés a tangenciális (pályamenti) eredő erőt adja, amely most a gravitációs erő pályamenti összetevőjének és a légellenállási erőnek az eredője (*1. ábra*), tehát

$$ma_{\text{t}} = F_{\text{grav}\parallel} - F_{\text{lég}}.$$

Ezt vessük össze (2)-vel:

$$F_{\text{lég}} = F_{\text{grav}\parallel} - F_{\text{lég}}.$$



1. ábra. A feladat számadataival: $F_{\text{grav}} = 4{,}6$ kN, $F_{\text{lég}} = 5{,}6$ mN, $\varphi = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ rad $= 0{,}25''$. A vázlatos ábra *nem méretarányos*

Az az egyszerű összefüggés tehát, amely a légellenállási erő, valamint a műholdra ható két erő (gravitációs és légellenállási) eredőjének pályamenti összetevője között fennáll az, hogy *e kettő nagysága egyenlő egymással.*

c) Ismét az összenergia változásából érdemes kiindulnunk, de az összenergiát most ne a kinetikus, hanem a potenciális energiával fejezzük ki, felhasználva az $E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}}/2$ összefüggést:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{E_{\text{pot}}}{2} + E_{\text{pot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2}.$$

$$\frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t},$$

ami Δr-rel szorozva és osztva így is írható:

$$\frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r}\,\frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Mit mondhatunk a sugár változási sebességéről? Ismert adat, hogy egyetlen fordulat során a pályasugár $\varepsilon = 100$ méterrel csökken, tehát

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-\varepsilon}{T} = \frac{-\varepsilon}{\frac{2r\pi}{v}}.$$

Határozzuk meg a potenciális energia és a pályasugár változásának viszonyát:

$$\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r} = \frac{\Delta\left(-\gamma\frac{mM}{r}\right)}{\Delta r} = \gamma\frac{mM}{r^2}.$$

Most már felírhatjuk az (1) egyenletet, amelyben az összenergiát a potenciális energiával fejezzük ki:

$$-F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r}\,\frac{\Delta r}{\Delta t},$$

$$-F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{1}{2}\,\gamma\frac{mM}{r^2}\,\frac{-\varepsilon}{\frac{2r\pi}{v}},$$

$$F_{\text{lég}} = \frac{1}{4\pi}\,\gamma\frac{mM}{r^3}\,\varepsilon,$$

$$K\varrho v^2 = \frac{1}{4\pi}\,\gamma\frac{mM}{r^3}\,\varepsilon.$$

Ebben az egyenletben már csak ϱ az egyetlen ismeretlen, éppen ezt kellett kiszámítanunk! De hogy még szebb, elegánsabb formulát kapjunk, használjuk fel újra a $v^2 = \gamma M/r$ összefüggést, így a következőt kapjuk:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi K}\,\frac{m}{r^2}\,\varepsilon.$$

$r = r_2$, valamint ε megadott értékét behelyettesítve

$$\varrho = 4 \cdot 10^{-10}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Kiegészítés: Az *a*) kérdésre $mg = mv^2/r$ felhasználásával is válaszolhatunk, ha figyelembe vesszük a gravitációs gyorsulás magasságfüggését: $g = g_0\big(1 - \frac{h}{r}\big)^2$. Ezzel

$$v = \sqrt{gr} = \left(1 - \frac{h}{r}\right)\sqrt{g_0 r},$$

ahol g_0 az egyenlítői gravitációs gyorsulás, amely azonban a táblázatban adott egyenlítői nehézségi gyorsulásnál nagyobb! A különbség a Föld forgásából adódó „centri” gyorsulás.