3. feladat. Csillagkezdemény kialakulása

i. A kezdeti szakaszban a hőmérséklet nem változik. Így a Boyle–Mariotte-törvény alapján:

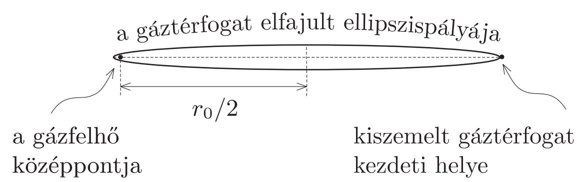
$$\frac{p_1}{p_0}=\frac{V_0}{V_1}=\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3=8.$$

ii. A folyamat kezdetén a gáz nyomásából származó erők elhanyagolhatók a gravitációs erőhöz képest. Tekintsünk egy kicsiny gáztérfogatot a gázfelhő szélén. Ismert, hogy egy gömbszimmetrikus tömegeloszlás gravitációs tere a gömbön kívül (és annak felületén) megegyezik a gömb középpontjába helyezet (azonos tömegű) tömegpont gravitációs terével. Így a gáztérfogatunk kezdeti gyorsulása $g\approx Gm/r_0^2$. Mivel a gravitációs erő nem változik lényegesen, a gyorsulást közelíthetjük ezzel az állandó értékkel. Ebben a közelítésben egyenletesen gyorsuló mozgásról beszélhetünk. A négyzetes úttörvényből az idő könnyen kifejezhető:

$$t_2\approx\sqrt{\frac{2(r_0-r_2)}{g}}=\sqrt{\frac{2r_0^2(r_0-r_2)}{Gm}}=\sqrt{\frac{0{,}1\,r_0^3}{Gm}}.$$

Megjegyzés. Érdemes észrevenni, hogy ez az idő csak a gázfelhő sűrűségétől függ. Ez azt jelenti, hogy a gázfelhő belsejében kiszemelt kicsiny gáztérfogatra is igaz, hogy t_2 idő alatt csökken a középponttól mért távolsága 5%-kal. Hasonló okoskodással belátható, hogy ez a későbbi (nem nulla kezdősebességű) mozgásszakaszokra is érvényes, és emiatt a kezdetben homogén anyageloszlású gázfelhő mindaddig homogén marad, amíg a gáz nyomása elhanyagolható.

iii. Továbbra is feltételezzük, hogy a kicsiny gáztérfogatunk mozgásában a gravitáción kívüli hatásokat elhanyagolhatjuk. A feladat szövege azt sugallja, hogy az esési pályát egy elfajult ellipszispályának tekintsük, melynek fél nagytengelye $r_0/2$ (lásd a *4. ábrát*).



4. ábra

Kepler III. törvényéből következik, hogy a pálya periódusideje megegyezik egy $r_0/2$ sugarú körpálya T periódusidejével, amit az egyenletes körmozgás mozgásegyenletéből könnyen ki lehet számítani:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{r_0}{2}=\frac{Gm}{(r_0/2)^2},\qquad \text{ahonnan}\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$

A feladat szövegéből kitűnik, hogy a végső sugár sokkal kisebb, mint a kezdeti, ezért az összeomlás idejét közelíthetjük a kiszámolt periódusidő felével:

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$

Megjegyzés. A gázfelhő gravitációs összeroskadásának idejét úgy is megkaphatjuk, hogy az energiamegmaradás törvényét használva kiszámítjuk a sebesség helyfüggését:

$$\frac{v^2}{2}-\frac{Gm}{r}=E\quad\left(=-\frac{Gm}{r_0}\right),$$

ahonnan

$$-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v(r)=\sqrt{2E+\frac{2Gm}{r}},$$

majd a sebesség reciprokát integráljuk a teljes pályára:

$$t=\int_0^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E+\frac{2Gm}{r}}}.$$

Az integrál (melynek kiszámítása a verseny korlátozott ideje alatt nyilván nem várható el) ugyanazt az eredményt adja, mint a Kepler-törvényekre hivatkozó megoldás.

iv. Mivel a gáz hőmérséklete nem változik, azért a gáz által kisugárzott hő a gázon végzett munkával egyenlő. A gáz izoterm állapotváltozása során a végzett munka:

$$W=-\int_{V_0}^{V_3}p(V)\,\mathrm{d}V,$$

ahol a nyomás a $pV = \frac{m}{\mu}RT_0$ gáztörvényből számolható. A kisugárzott hő eszerint

$$Q = W = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_3} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V = RT_0\frac{m}{\mu}\ln\frac{V_0}{V_3} = 3RT_0\frac{m}{\mu}\ln\frac{r_0}{r_3}.$$

Megjegyzések. 1. A felhasznált munkaképlet arra az esetre vonatkozik, amikor a gáz egyensúlyi állapotokon keresztül jut el egyik állapotból a másikba. Ez a jelen esetben *nem teljesül,* de ennél jobb becslést nem lehet adni.

2. Sokan ott hibáztak, hogy a gravitációs energia teljes változásával tették egyenlővé a kisugárzott hőt. Ez csak akkor lenne igaz, ha a nyomás a gravitációval azonos nagyságú lenne, itt viszont elhanyagolható. A feladat szövegében megadott $Gm\mu/r_0 \gg RT_0$ egyenlőtlenséggel könnyű belátni, hogy a kisugárzott hő elhanyagolható a gravitációs energiaváltozáshoz képest.

v. Az összeroskadás ebben a szakaszban adiabatikus. Az adiabatikus állapotváltozásra igaz, hogy $pV^{\gamma} =$ állandó. Ebből és a gáztörvényből következik, hogy $TV^{\gamma-1} =$ állandó. Ezt felhasználva:

$$T = T_0\left(\frac{V_3}{V}\right)^{\gamma-1} = T_0\left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3}.$$

vi. Az összeroskadás $r_3 \to r_4$ szakaszában a gravitációs energia és a meglévő mozgási energia alakul át a gáz belső energiájává. A mozgási energia megegyezik az $r_0 \to r_3$ szakaszon történő gravitációs energiaváltozás nagyságával. A gravitációs energiaváltozást a következő formulával becsülhetjük:

$$\Delta E_{\mathrm{g}} = -G\frac{m^2}{r_4} - \left(-G\frac{m^2}{r_0}\right) \approx -G\frac{m^2}{r_4}.$$

(A pontosabb, integrálással meghatározható energiaváltozás ettől a becsléstől egy $\frac{3}{5}$-ös szorzótényezőben különbözik.) A belső energia megváltozása:

$$\Delta E_{\mathrm{b}} = \frac{f}{2}nRT_4 - \frac{f}{2}nRT_0 \approx \frac{f}{2}nRT_4 \approx nRT_4.$$

A fenti közelítéseknél kihasználtuk, hogy $r_4 \ll r_0$ és $T_4 \gg T_0$; az $f/2$ tényező helyébe pedig azért írtunk 1-et, mert csupán nagyságrendi becslésre törekszünk; az egységnyi nagyságú szorzótényezőket nem vesszük számításba.)

A két energiaváltozás nagyságát egyenlővé téve – és a hőmérsékletet a felhő sugarával kifejezve – kapjuk:

$$G\frac{m^2}{r_4} \approx \frac{m}{\mu}RT_0\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3}.$$

Innen a keresett méret és hőmérséklet kifejezhető:

$$r_4 \approx r_3\left(\frac{RT_0r_3}{\mu mG}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}, \qquad T_4 \approx T_0\left(\frac{RT_0r_3}{\mu mG}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}.$$

Megjegyzések. 1. Az egyensúlyba került gázfelhő közepén kialakuló nyomást (közelítően, de nagyságrendileg helyesen) kétféleképpen is kiszámíthatjuk: egyrészt a (ϱ sűrűségű) gáz hidrosztatikai nyomásaként:

$$p \approx \varrho r_4 \cdot \frac{Gm}{r_4^2},$$

másrészt a gáztörvény felhasználásával:

$$p \approx \frac{\varrho}{\mu}RT_4.$$

A két kifejezés jobb oldalát egyenlővé téve (valamint T_4 és r_4 korábban kiszámított kapcsolatát is felhasználva) megkapjuk T_4 és r_4 fentebb levezetett kifejezéseit.

2. Sok versenyző (a magyar diákok közül is többen) a *virtuális munka elvét* használták. Eszerint egy test akkor van egyensúlyi helyzetben, ha egy kicsiny elképzelt (virtuális) kitérítés esetén a testen végzett munkák összege nulla. A jelen esetre alkalmazva ez azt jelenti, hogy kicsi sugárváltozás esetén a felszabaduló gravitációs energia éppen fedezi a gáz belső energia növekedését. Az így számolt képletek egy konstans szorzózényezőben térnek el a fenti eredményektől.

Az eltérés okát egy egyszerű mechanikai példával szemléltethetjük. Ha egy nyújtatlan rugóra egy testet akasztunk, és felírjuk az energia-megmaradás törvényét, akkor a rezgőmozgás alsó és felső maximális kitérési helyét kapjuk meg, a virtuális munka elvével pedig az egyensúlyi helyzetet találjuk meg.