2. feladat. Kelvin csepegtetős gépe

A* rész. Egyetlen cső. *i. A feladat szövege szerint a víz *lassan* csöpög ki a csőből: ez időben állandósult vízhozamra utal, ezért a csőben lévő vízoszlopra ható erők eredője (a cső falánál és a folyadékban fellépő belső súrlódás miatt) zérus. A vízcseppben uralkodó nyomás a külső légnyomásnál a felületi feszültség miatt $\Delta p = 2\sigma/r$ értékkel nagyobb (itt r a vízcsepp sugara). A cső végén függő, lassan hízó vízcseppre a következő négy erő hat: függőlegesen lefelé a $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ nehézségi erő, a cső szája és a víz érintkezési vonalán a felületi feszültségből származó $2\pi r\sigma$ nagyságú, felfelé mutató erő, a p_0 külső légnyomásból származó (felfelé irányuló) erő és a vízcsepp csőhöz csatlakozó részén egy kis d átmérőjű körlapon ható $p_0 + \Delta p$ nyomásból származó, lefelé mutató erő. Könnyen belátható, hogy utóbbi két erő eredője $\frac{\pi}{4} d^2 \Delta p$, ezt a d-ben másodrendűen kicsiny hatást $d \ll r$ miatt elhanyagolhatjuk.

Közvetlenül a leválás előtt a vízcsepp jelentősen deformálódik: a csepp felső része és a cső között kicsiny, d átmérőjű, hengeres nyak képződik. Ebben a pillanatban a „nyak” által függőlegesen felfelé kifejtett $\pi d\sigma$ kapilláris erő éppen ellensúlyozza a vízcsepp súlyát, azaz

$$\pi d\sigma = \frac{4}{3}\pi r_{\max}^3 \rho g,$$

innen a csepp maximális sugara:

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}.$$

ii. A vízcsepp töltéseloszlása ($d \ll r$ miatt) jó közelítéssel egyenletes, így a csepp φ potenciálja egy Q töltésű gömb potenciáljaként számolható:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

ebből $Q = 4\pi\varepsilon_0 \varphi r$.

iii. A feltöltött gömbön kívül, felületének közelében $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ nagyságú térerősség uralkodik, a gömbön belül pedig zérus az elektromos térerősség. A gömb felületén lévő, ΔA felszínű kicsiny darabka töltése az egyenletes töltéseloszlás miatt $\Delta Q = \frac{\Delta A}{4\pi r^2} Q$, a rá ható erő pedig

$$\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}\Delta A = \frac{\varepsilon_0 \varphi^2}{2r^2}\Delta A.$$

(Az $\frac{1}{2}$-es szorzótényező – kissé pongyolán fogalmazva – onnan származik, hogy a térerősség csak a darabka külső oldalán E, a belső oldalon zérus, így átlagosan $E/2$ a darabka helyén a térerősség. Ugyanez a faktor jelenik meg egy síkkondenzátor lemezei között ható erő kifejezésében is.)

A vízcseppet a felületi feszültség igyekszik összehúzni, a felületén lévő, egymást taszító töltések pedig igyekeznek kitágítani. Az elektromos taszításból származó erő $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ értékkel csökkenti a csepp belsejében uralkodó nyomást. A csepp akkor szakad szét, ha ez a „negatív” nyomás éppen megegyezik a görbületi nyomással:

$$\frac{\varepsilon_0 \varphi_{\max}^2}{2r^2} = \frac{2\sigma}{r},$$

ebből a maximálisan alkalmazható potenciál $\varphi_{\max} = 2\sqrt{\sigma r/\varepsilon_0}$.

B* rész. Két cső. *i. Bár a cseppek potenciálja a földelés miatt nulla, a környező, hengeres elektródák hatása miatt mégis feltöltődnek. Vizsgáljuk meg a potenciál változását a következő, a bal oldali csepptől a jobb oldali cseppig vezető útvonalon: a bal oldali csepptől a bal oldali hengeres elektródáig U a potenciálkülönbség, a bal oldali és a jobb oldali elektróda között q/C a feszültség (hiszen a kondenzátoron át kell haladnunk), végül a jobb oldali elektróda és a jobb oldali csepp között (a szimmetria miatt és a töltések előjele miatt) ismét U a feszültség. Útvonalunk kezdő- és végpontja egyaránt zérus potenciálú, tehát a feszültségek összegének is nullának kell lennie:

$$U + q/C + U = 0,$$

azaz az azonos oldalon elhelyezkedő hengeres elektróda és csepp között

$$U = \pm q/(2C)$$

a feszültség (az előjel attól függ, hogy a jobb vagy bal oldalt vizsgáljuk). Az ***A/ii.*** rész eredményét felhasználva, a $\varphi = q/(2C)$ és $r = r_{\max}$ helyettesítéssel megkapjuk az éppen leeső cseppek töltését:

$$Q = 2\pi\varepsilon_0 q r_{\max}/C.$$

ii. Az egységnyi idő alatt lecseppenő cseppek száma n, így a hengeres elektródák (vagyis a kondenzátor) töltése dt idő alatt d$q = Qn$dt értékkel növekszik. Az előző alkérdés eredményét felhasználva ez tovább alakítható:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max} n}{C} q,$$

ami egy előjeltől eltekintve a radioaktív bomlás differenciálegyenletére hasonlít. A jobb oldalon eltérő előjel azt eredményezi, hogy a kondenzátor töltése a radioaktív atommagok számával ellentétben nem exponenciálisan csökken, hanem exponenciálian növekszik az idővel:

$$q(t) = q_0 e^{\gamma t}, \quad \text{ahol} \quad \gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_{\max} n}{C} = \frac{\pi\varepsilon_0 n}{C}\sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}.$$

iii. A leeső cseppek akkor érhetik el az alattuk elhelyezkedő edényeket, ha az mgH gravitációs helyzeti energiájuk elég nagy az elektrosztatikus taszítás legyőzéséhez. Közvetlenül a leszakadás után a Q töltésű csepp a hengeres elektróda által létrehozott $q/(2C)$ potenciált érzi, amikor pedig az alatta lévő, vízzel telt edénybe érkezik, $-q/(2C)$ potenciálú helyre kerül. Az edény elérésének feltétele tehát:

$$\frac{q}{C} Q \leq mgH, \quad \text{ahol} \quad Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 q r_{\max}}{C}.$$

Ebből a kondenzátor $U_C = q/C$ feszültségének legnagyobb értéke:

$$U_C^{\max} = \sqrt{\frac{mgH}{2\pi\varepsilon_0 r_{\max}}}.$$

Az ***A/i.*** rész eredményét felhasználva a végeredmény:

$$U_C^{\max} = \sqrt[6]{\frac{\sigma^2 d^2 H^3 \rho g}{6\varepsilon_0}}.$$