1. feladat. Ragadd meg a lényeget!

A* rész. Hajítás, *i. Ha a golyót függőlegesen felfelé dobjuk, akkor – a mechanikai energia megmaradása alapján – eléri az $x = 0$, $z = \dfrac{v_0^2}{2g}$ pontot. Ezt összehasonlítva a $z \le z_0 - kx^2$ egyenlőtlenséggel

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

adódik. A k állandó meghatározásához vizsgáljuk a $z \to -\infty$ határesetet! Ebben a határesetben a golyó akkor jut (adott z érték esetén) vízszintes irányban a legmesszebbre, ha a parabolapálya a leglaposabb, azaz ha a golyót vízszintesen hajítjuk el. Ekkor

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

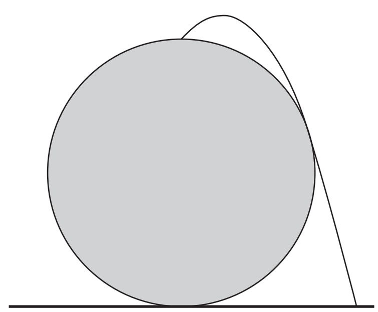
Ezt beírva a megadott, most $x \to \infty$ határesetben vizsgált egyenlőtlenségbe

$$-\frac{g}{2v_0^2}x^2 \le z_0 - kx^2, \quad \text{azaz} \quad k - \frac{g}{2v_0^2} \le \frac{z_0}{x^2} \to 0.$$

Innen $k \le \dfrac{g}{2v_0^2}$. Ha $k < \dfrac{g}{2v_0^2}$ teljesülne, akkor (nagy x-re) a golyó által elérhető tartomány és a megadott egyenlőtlenség által meghatározott tartomány között egy „rés” lenne, ezt a lehetőséget tehát kizárhatjuk. Eszerint a kérdezett paraméter:

$$k = \frac{g}{2v_0^2}.$$

ii. A golyó pályája megfordítható, így az eredeti kérdés helyett vizsgálhatjuk ezt is: legalább mekkora sebességgel kell az épület tetejéről eldobni a golyót, hogy valahol földet érjen (anélkül, hogy az épületnek ütközne). Könnyen belátható, hogy a golyó pályája vagy az *1. ábrán* látható, az épületet érintő parabola, vagy pedig egy olyan vízszintes hajítás, ahol a parabola görbülete a csúcspontjában megegyezik a gömb sugarával. (Ha a golyó sehol nem érinti a parabolát, akkor csökkenthető a sebessége, egész addig, amíg valahol érinteni fogja.)



1. ábra

Vizsgáljuk meg a vízszintes hajítást! Ha változatlan sebességgel, de a vízszinteshez képest kis szöggel felfelé dobnánk a golyót, akkor sehol sem érintené az épületet – így viszont kezdeti sebessége csökkenthető lenne! Ebből következik, hogy a vízszintes hajítás nem lehet ideális, így a helyes megoldás az 1. ábrán látható pálya.

iii. Vegyük észre, hogy az egész épületnek benne kell lenni abban a tartományban, amit az épület tetejéről induló, minimális sebességű hajításokkal el tudnánk találni. (Hiszen ha az optimálishoz képest csökkentjük az eldobás vízszintessel bezárt szögét, akkor a golyó nem érinti, hanem eltalálja az épületet.) Ugyanakkor a dobással elérhető tartomány határának érinteni kell az épületet. (Ellenkező esetben az optimális sebességgel lehetne úgy hajítani, hogy az nem érinti az épületet.)

Tehát a minimális sebességgel eldobott golyóval elérhető tartomány határa és az épület felszíne érinti egymást (a szimmetria miatt két pontban). Ha a minimális indítási sebesség a gömb tetejéről v_0, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$x^2 + z^2 + 2zR = 0, \qquad z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

z kiküszöbölésével x^2-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$\left(\frac{g}{2v_0^2}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)x^2 + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R\right)\frac{v_0^2}{g} = 0.$$

A két görbe akkor érinti egymást, amikor az egyenlet diszkriminánsa éppen 0. Ebből

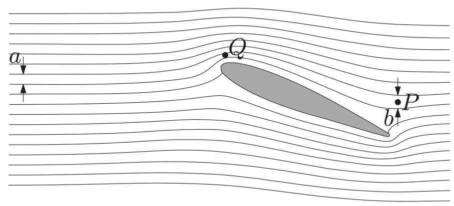
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{gR}{v_0^2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{gR}{v_0^2},\qquad \text{azaz}\qquad v_0^2=\frac{gR}{2}.$$

A mechanikai energia megmaradása alapján a keresett minimális indítási sebesség

$$v_{\min}=\sqrt{v_0^2+4gR}=3\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

B* rész. Légáramlás a szárny körül.** ***i. A szárnyhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a kontinuitási törvény miatt két áramvonal között (egy áramlási vonal mentén) állandó a levegő térfogatárama (az időegységenként átáramló levegő mennyisége). A térfogatáram a sebesség és a keresztmetszet szorzata. A keresztmetszet viszont esetünkben – a kétdimenziós geometria miatt – arányos az áramvonalak távolságával, ami a *2. ábráról* leolvasható. Mivel nincsen szél, a nyugalomban lévő levegő sebessége a szárnyhoz viszonyítva éppen v_0. Az ábrán megmérve $a=10$ egység és $b=13$ egység. Ez alapján a levegő sebessége a P pontban a szárnyhoz képest $u=v_0\frac{a}{b}$, a földhöz képest pedig

$$v_P=v_0-u=v_0\left(1-\frac{a}{b}\right)=23\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$



2. ábra

ii. Bár az $\frac{1}{2}\varrho v^2$ dinamikus nyomás aránylag kicsi, változása bizonyos mértékű adiabatikus összenyomódást vagy kitágulást eredményez. Ott, ahol a levegő kitágul, a hőmérséklete lecsökken, és ha a hőmérséklet eléri a harmatpontot, akkor a vízgőz kicsapódik, apró vízcseppek jelennek meg. A kicsapódás ott kezdődik meg, ahol a kitágulás maximális, azaz ahol a levegő (statikus) nyomása minimális. A Bernoulli-törvény szerint $p+\frac{1}{2}\varrho v^2=$ állandó, így p ott lesz a legkisebb, ahol v (a levegő szárnyhoz viszonyított sebessége) a legnagyobb, azaz ahol az áramvonalak a legközelebb vannak egymáshoz. Ez a 2. ábrán Q-val jelölt pont.

iii. Először meg kell határoznunk a harmatpontot. A vízgőz nyomása $p_\mathrm{w}=p_\mathrm{sa}r=2{,}08\,\mathrm{kPa}$. A kis változások miatt a gőznyomás hőmérséklet-függését tekinthetjük közelítőleg lineárisnak:

$$\frac{p_\mathrm{sa}-p_\mathrm{w}}{T_a-T}=\frac{p_\mathrm{sa}-p_{sb}}{T_a-T_b},$$

amiből $T\approx 291{,}5$ K adódik.

Ezután meg kell határozni a levegő sebessége és hőmérséklete közti kapcsolatot. A Bernoulli-törvényhez hasonlóan egy energiamérleget írhatunk fel, de figyelembe kell vennünk a levegő összenyomásával/kitágulásával kapcsolatos munkát is. Mivel a levegő rossz hővezető, és az áramlás során gyorsak a változások, a folyamat adiabatikus. Egy áramlási cső (például két közeli áramvonal közötti térrész) két pontjára (1 és 2) felírva a munkatételt egy mol levegőre az

$$\frac{1}{2}Mv_1^2+c_VMT_1+p_1V_1=\frac{1}{2}Mv_2^2+c_VMT_2+p_2V_2$$

összefüggést kapjuk, ahol M a levegő moláris tömege, c_V pedig az állandó térfogaton mért fajhő. (Az első tag a gáz mozgási energiája, a második a belső energiája, a harmadik pedig a gáz benyomásakor végzett munka.) Felhasználva, hogy egy mol gázra $pV=RT$, és $c_VM+R=c_pM$, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}v^2+c_pT=$ állandó. Ebből

$$c_p\Delta T=-\Delta\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}v_{\text{krit.}}^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right),$$

ahol c az áramvonalak távolsága a Q pontban. Felhasználva, hogy $c\approx 4{,}5$ egység és $\Delta T=-1{,}5$ K,

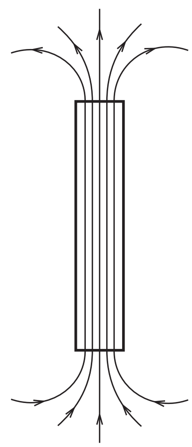
$$v_{\text{krit.}}=c\sqrt{\frac{2c_p\Delta T}{c^2-a^2}}\approx 23\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés: A valóságban ennél valamivel nagyobb sebesség szükséges, mert a levegő hirtelen kicsapódása csak jelentős túltelítés hatására indul meg.

C* rész. Mágneses csövek.** ***i. A cső szupravezető falán nem mehetnek át indukcióvonalak, így a csőben állandó a fluxus. A cső belsejében örvénymentes a tér, a két feltételből együtt pedig adódik, hogy homogén is, azaz az indukcióvonalak párhuzamosak, és egyenlő távolságra vannak egymástól.

Megjegyzés: A csövön kívül a tér *hasonlít* a vékony, hosszú tekercs (szolenoid) mágneses teréhez, azzal a *fontos különbséggel,* hogy a szolinoid végeinek közelében a tekercs oldalán is lépnek ki indukcióvonalak, a szupravezető csőnél ez nem lehetséges. A másik különbség: a szolenoid árama (egyenletes tekercselés esetén) hosszegységenként mindenhol ugyanakkora, a szupravezető cső falában folyó áram pedig a végek közelében nem egyenletes.

A szupravezető cső indukcióvonalait vázlatosan a *3. ábra* mutatja.



3. ábra

ii. Nyújtsuk meg gondolatban egy kicsiny $\Delta\ell$ értékkel a csövet, és vizsgáljuk meg, hogy ehhez mennyi munkára van szükség! A cső fluxusa nem változhat (mert a fluxusváltozás a szupravezetőben végtelen nagy áramokat indukálna), így a mágneses indukció is állandó: $B=\dfrac{\Phi}{\pi r^2}$. A mágneses tér energiasűrűsége $\dfrac{1}{2\mu_0}B^2$, amiből a cső megnyújtásához szükséges munka

$$\Delta W=\frac{1}{2\mu_0}B^2\Delta V=\frac{1}{2\mu_0}\frac{\Phi^2}{\pi^2r^4}\pi r^2\Delta\ell=\frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}\Delta\ell.$$

Ezt a munkát a húzóerő végzi: $\Delta W=T\Delta\ell$, amiből a keresett erő

$$T=\frac{\Phi^2}{2\mu_0\pi r^2}.$$

iii. A csövek között fellépő erő iránya – az elrendezés szimmetriája miatt – nyilván merőleges a csövek tengelyére. Az erő nagyságát egy elektrosztatikus analógia alapján fogjuk meghatározni. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a rendszer mágneses energiája, ha az egyik csövet egy kicsit elmozdítjuk, eltávolítjuk a másiktól! A csövek belsejében semmi se változik, mert a csövek fluxusa állandó, csak a külső tér változik. A *csöveken kívül* a mágneses indukció örvénymentes (mert nincsenek áramok), a csövek végpontjai $\pm\Phi$ erősségű források, ezeken kívül viszont mindenhol forrásmentes a tér. Ezek a *csöveken kívül* pontosan olyan feltételek, mint amilyenek négy $\pm Q$ nagyságú elektromos töltés elektromos terét jellemzik. (A *csöveken belül* természetesen különböző a két tér, és a csövek falai is az elektromos esettől különböző határfelületet jelentenek, de *három dimenzióban* a vékony csövek elhanyagolható módon torzítják a *csöveken kívüli* teret.) Ezek szerint a csövek végpontjait úgy tekinthetjük, mintha mágneses ponttöltések lennének.

Keressük meg az elektromos és a mágneses jelenségek közötti megfeleltetést! Két Q nagyságú, egymástól a távolságra elhelyezett elektromos töltés között $F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{a^2}$ erő hat. Az egyik töltés terének energiasűrűsége a másik töltés helyén

$$w=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2=\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^4}.$$

Ezek szerint az erőt írhatjuk $F=8\pi wa^2$ alakban is. Ez a kifejezés bármely esetben használható két ellentétes előjelű, azonos nagyságú ponttöltés között fellépő erő meghatározására, így használhatjuk a mágneses ponttöltésekre is.

A Gauss-törvény alapján egy Φ fluxusú mágneses ponttöltés által a távolságra létrehozott indukció $B=\dfrac{\Phi}{4\pi a^2}$. Az energiasűrűség a ponttöltéstől a távolságra

$$w=\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{1}{32\pi^2\mu_0}\frac{\Phi^2}{a^4},$$

amiből az a távolságra lévő Φ fluxusú mágneses ponttöltések között fellépő erő

$$F = 8\pi w a^2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\Phi^2}{a^2}.$$

A négy ponttöltés közül az ellentétesek vonzzák egymást, a köztük fellépő erő $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\mu_0}\dfrac{\Phi^2}{\ell^2}$. Az átlósan elhelyezkedő azonos előjelű töltések közti taszítóerő normális komponense

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\Phi^2}{2\ell^2}.$$

Az eredő vonzó erő ezek alapján

$$F = 2\left(F_1 - F_2\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{8\pi\mu_0}\frac{\Phi^2}{\ell^2}.$$