3. feladat. Ion szóródása semleges atomon (100 éves a Rutherford-atommodell)

3.1. A Coulomb-törvény alapján az elektromos térerősség a dipólus tengelyén, attól r távolságra:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r+a)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2} - \left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2}\right].$$

Mivel $a/r \ll 1$, alkalmazhatjuk a kis x-ekre érvényes $(1+x)^n \approx 1+nx$ közelítést:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(1+2\frac{a}{r}\right) - \left(1-2\frac{a}{r}\right)\right] = \frac{2qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Vektorokkal kifejezésre juttathatjuk a dipólus által keltett térerősség nagyságát és irányát is (a dipól tengelye mentén):

$$\vec{E}_P = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

3.2. (Az eredeti ábra jelöléseivel) az ion által a semleges atom helyén létrehozott térerősség a Coulomb-törvény szerint

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3},$$

így a neutrális atom

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

nagyságú és irányú elektromos dipólmomentumra tesz szert. A 3.1. alkérdés végeredményét felhasználva ez a dipólmomentum az ion helyén

$$\vec{E}_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

térerősséget hoz létre, így az ionra ható erő:

$$\vec{f} = Q\vec{E}_P = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

A kifejezésből leolvasható, hogy az erő Q előjelétől függetlenül mindig a semleges atom felé mutat, vagyis vonzó jellegű.

3.3. Az egymástól r távolságra levő ion és atom kölcsönhatási energiája egy előjeltől eltekintve azzal a munkával egyezik meg, amennyit a két részecske „végtelen messzire" történő eltávolítása során végzünk:

$$U(r) = -\int_r^\infty \left|\vec{f}(\vec{r}\,')\right| \mathrm{d}r' = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2}\int_r^\infty \frac{1}{r'^5}\,\mathrm{d}r' = \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\left[\frac{1}{r'^4}\right]_r^\infty = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}.$$

3.4. A centrális erőtér miatt a mozgó ion perdülete az atom helyére vonatkoztatva megmarad. Amikor az ion legközelebb kerül az atomhoz, a sebességének nagysága maximális, iránya pedig merőleges a helyvektorára, így $mv_0 b = mv_{\max} r_{\min}$. A mechanikai energiamegmaradás szerint

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r_{\min}^4}.$$

E két egyenletből a minimális távolságra a

$$\left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + \frac{\alpha Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4} = 0,$$

egyenletre jutunk, amely $r_{\min}^2$-ben másodfokú. Az egyenlet megoldásai:

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}.$$

Ha $Q = 0$, akkor az ion egyenes pályán, b távolságra halad el a semleges atom mellett, így a két gyök közül a nagyobbat kell megtartanunk. Az ion és az atom közötti legkisebb távolság tehát

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}.$$

3.5. Ha a b impakt paraméter elég nagy, az előző kérdésben kiszámított $r_{\min}$ távolságra közelíti meg az ion az atomot. A b paraméter csökkentésével azonban az $r_{\min}$-re kapott kifejezésben a négyzetgyökjel alatt negatív érték adódik, azaz nincs minimális távolság az ion és az atom között: az ion spirális pályán a semleges atomba csapódik. Ez akkor következik be, ha

$$b < b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

így az ion befogásának hatáskeresztmetszete

$$A = \pi b_0^2 = \pi\left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Megjegyzés. A 3.4. és 3.5. alkérdésekben tárgyaltak grafikusan is szemléltethetők az ún. *effektív potenciál* segítségével. Ha az energiamegmaradást kifejező

$$\frac{1}{2}m\left(v_r^2 + r^2\omega^2\right) + U(r) = E \qquad \left(= \frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

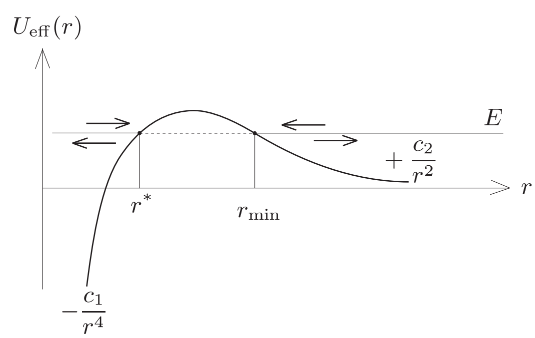
egyenletből a szögsebességet kiküszöböljük a perdületmegmaradás $mr^2\omega = J$ $(= mbv_0)$ törvényének felhasználásával, akkor a sugár irányú (radiális) mozgásra kapunk egyenletet:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \left(U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right) = E.$$

A zárójelben álló kifejezést effektív potenciálnak szokták nevezni. $U_{\text{eff}}(r)$ a két részecske valódi (vonzó jellegű) kölcsönhatási energiája mellett tartalmaz egy – a perdület nagyságától is függő – taszító („centrifugális") potenciális energiát is.

Az ion-atom távolság időbeli változása éppen úgy zajlik le, mint egy tömegpont egydimenziós mozgása $U_{\text{eff}}(r)$ potenciállal megadott erőtérben. (Kicsit erőltetett hasonlattal: ahogy egy golflabda gurul az $U_{\text{eff}}(r)$ függvénnyel megadott domborzati viszonyok között.)

Jelen esetben az effektív potenciál $-\frac{c_1}{r^4} + \frac{c_2}{r^2}$ alakú, ahol c_1 és c_2 a feladatban szereplő paraméterekkel kifejezhető pozitív állandók (*2. ábra*). A nagy távolságból érkező, E energiájú ion radiális sebessége ott válik nullává, ahol $U_{\text{eff}}(r) = E$. Ez a feltétel a korábban kiszámított $r = r_{\min}$ értéknél és egy ennél kisebb $r = r^*$-nál is fennáll. Az ion (ha csak a radiális mozgását nézzük) nyilván $r = r_{\min}$ távolságnál „fordul vissza", a potenciálhegy $r^* < r < r_{\min}$ tartományába egyáltalán el sem jut. (Érdekes, hogy a kvantumelméletben nem ez a helyzet: a hullámként viselkedő ion „át tud bújni" a potenciálhegy alatt, és még akkor is eljut az atomig, amikor ezt a klasszikus fizika szerint nem tehetné meg. Ez a furcsa jelenség az ún. *alagúteffektus*.)



2. ábra

Az $r = r^*$-os fordulópontnak is van fizikai jelentése: ha az ion nem végtelen messziről, hanem az atom közeléből, az atomtól távolodva indulna, akkor nem tudna tetszőleges messze eljutni, hanem $r = r^*$-nál a radiális mozgás visszafordulna (tehát ez az érték lenne az atom és az ion közötti maximális távolság.)

Ha a b paraméter (és az ezzel arányos perdület) nem elég nagy, akkor az effektív potenciál maximumának értéke az E energia alá kerül. Ilyenkor a messziről érkező részecske – már a klasszikus fizika törvényei szerint is – beleesik az atomba. *(G. P.)*