2. feladat. Elektromosan töltött szappanbuborék

2.1. A szappanbuborék belsejében a P_i nyomás[1] a felületi feszültség miatt nagyobb, mint a külső (atmoszférikus) nyomás:

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0}.$$

(Ezt az összefüggést pl. a képzeletben félbevágott buborék egyik felére felírt erőegyensúly feltételéből származtathatjuk.)

Az egyesített gáztörvény a levegő intenzív állapotjelzőire így írható fel:

$$\frac{P}{\varrho T} = \text{állandó}.$$

Ennek alapján a kérdéses arány:

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}.$$

2.2. A megadott számértékek felhasználásával:

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{4\gamma}{R_0 P_a} = 0{,}0001.$$

(Az eredmény azt mutatja, hogy a felületi feszültség hatására a nyomás igen csekély mértékben növekszik.)

2.3. A buborék lebegésének a feltétele az, hogy a buborékra ható felhajtóerő egyenlő nagyságú a buborék súlyával, ami a szappanhártya és a benne lévő levegő súlyának az összege:

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a g = \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_i\right) g = 4\pi R_0^2 \varrho_s t g + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \frac{\varrho_a T_a}{T_i}\left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) g.$$

Megfelelő átrendezés és a számszerű adatok behelyettesítése után a buborék lebegéséhez szükséges belső hőmérséklet:

$$T_\mathrm{i} = \frac{R_0 \varrho_a T_a}{R_0 \varrho_a - 3\varrho_s t}\left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) = 307{,}1\ \mathrm{K}.$$

A lebegéshez a buborékban lévő levegőnek valamivel több, mint 7 °C-kal melegebbnek kell lennie a külső levegő hőmérsékleténél.

2.4. Miközben a buborék belsejében a hőmérséklet a külső levegő hőmérsékletére csökken, a buborék sugara 0,8%-kal lecsökken, és a szappanhártya vastagsága is megnő. Ezeket a változásokat azonban a feladat szövegében szereplő tanács szerint elhanyagoljuk. Nyugvó levegőben ilyenkor a buborék a talaj felé süllyed. Az u sebességgel felfelé áramló levegő akkor akadályozza meg a buborék leesését, ha a Stokes-féle közegellenállási erő megegyezik vagy meghaladja a buborék súlyának és a felhajtóerőnek a különbségét:

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_i\right) g - \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a g =$$

$$= \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right]\right) g - \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a g.$$

Átrendezés után a felfelé áramló levegő sebességére a következő relációt kapjuk:

$$u \geq \frac{2R_0 \varrho_s t g}{3\eta} + \frac{8R_0 \varrho_a \gamma g}{9P_a \eta}.$$

2.5. A számszerű adatok behelyettesítése után $u \geq 0{,}36$ m/s eredmény adódik.

Megjegyezzük, hogy a paraméteres kifejezés második tagja az első tagnál három nagyságrenddel kisebb, vagyis *elhanyagolható*. Ez is indokolja, hogy *a továbbiakban a felületi feszültségből adódó tagokat elhanyagoljuk.*

2.6. Elektromosan töltött szappanbuborékok esetén a felületi feszültség hatásához képest fordított nyomáskülönbség alakul ki a buborék belseje és a külső levegő között, mivel a buborék felületén lévő töltések taszítják egymást. Ezt a nyomáskülönbséget jelöljük így: ΔP_el. Ezzel a jelöléssel $P_a = P_i + \Delta P_\mathrm{el}$; feladatunk az egyenlőség jobb oldalán lévő két tag meghatározása.

Elektromos töltések nélkül (a felületi feszültség hatásának elhanyagolásával) a buborékban a nyomás P_a, és a buborék térfogata a kezdeti sugár köbével, vagyis R_0^3-bel arányos. Feltöltött buborék esetén a nyomás P_i, a térfogat pedig

[1] Megtartottuk az olimpián alkalmazott, a hazai gyakorlattól néhol kicsit eltérő jelöléseket.

a megnövekedett sugár köbével, vagyis R_1^3-bel arányos. Mivel a buborékban lévő levegő hőmérséklete nem változik, így alkalmazhatjuk rá a Boyle–Mariotte-törvényt, vagyis a nyomás és a térfogat fordított arányosságát:

$$P_i = \frac{R_0^3}{R_1^3} P_a.$$

A töltések következtében fellépő ΔP_{el} nyomásjárulékot a buborék falánál fellépő átlagos elektromos térerősség $E_{\text{átlag}}$ és az egységnyi felületre jutó töltés (töltéssűrűség) szorzataként számíthatjuk ki.[2] Az R_1 sugarú buborék belsejében a térerősség nulla, közvetlenül a buborék felületén kívül pedig kq/R_1^2, így

$$E_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}\left(\frac{kq}{R_1^2} + 0\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R_1^2}.$$

Másrészt a töltéssűrűség $q/\left(4\pi R_1^2\right)$, így az elektromos eredetű nyomáskülönbség:

$$\Delta P_{\mathrm{el}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{R_1^4}.$$

Ugyanez a mennyiség a külső és a belső gáznyomás különbségeként is felírható, tehát

$$\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{R_1^4} = P_a - P_i = P_a\left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right),$$

ahonnan a keresett kifejezés pl. így adható meg:

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^4}.$$

2.7. Feltételezve, hogy a buborék sugarának $\Delta R = R_1 - R_0$ megváltozása (az eredeti sugárhoz viszonyítva) *kicsi,* a fenti formulában az

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 = \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^4 \approx 1 + 4\frac{\Delta R}{R_0}$$

közelítés alkalmazható, s innen a sugár (kicsiny) növekedésére ez adódik:

$$\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

2.8. A lebegés feltétele most is a felhajtóerő és a súly egyensúlya:

$$\frac{4\pi}{3} R_1^3 \varrho_a g = \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_i\right) g.$$

Ha a felületi feszültség hatását elhanyagoljuk, akkor a töltetlen buborék belsejében a kezdeti sűrűség megegyezik a külső levegő sűrűségével ($\varrho_{\mathrm{i}} = \varrho_a$), hiszen a hőmérséklet is és a nyomás is (jó közelítéssel) ugyanakkora kívül és belül. A feltöltött buborék R_1 sugarát fejezzük ki ΔR segítségével:

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^3 \varrho_a g = \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_i\right) g.$$

Közelítés és némi egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$\frac{4\pi}{3} R_0^2 \left(3\Delta R\right) \varrho_a g = 4\pi R_0^2 \varrho_s t g.$$

Helyettesítsük be ΔR helyére az előző alkérdés eredményét, és fejezzük ki a töltést:

$$q = \sqrt{\frac{96\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^3 \varrho_s t}{\varrho_a}} \approx 256\ \mathrm{nC}.$$

[2] Ezt legegyszerűbben úgy mutathatjuk meg, ha feltételezzük, hogy a vékony (de véges vastagságú) töltésrétegben a töltések eloszlása homogén. A Gauss-tétel alkalmazásával láthatjuk, hogy ekkor a belső nulla tér lineárisan növekedve éri el a külső felületen felvett értékét, tehát a töltésrétegben átlagosan a külső érték fele lép fel. Megmutatható azonban az is, hogy a vékony töltésrétegben tetszőleges töltéseloszlás esetén is a külső térerősség fele adja az átlagértéket.