1. feladat. Egy háromtest-probléma és a LISA

1.1. A két tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\omega_0^2 r = G\frac{mM}{(r+R)^2},$$

$$M\omega_0^2 R = G\frac{mM}{(r+R)^2}.$$

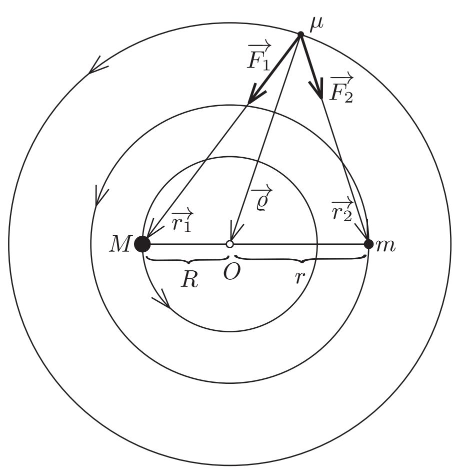
Bármelyik egyenletet rendezve, és felhasználva, hogy

$$\frac{M}{r} = \frac{m}{R} = \frac{M+m}{R+r},$$

a keresett szögsebesség

$$\omega_0 = \sqrt{G\frac{M+m}{(R+r)^3}}.$$

1.2. A μ tömeg infinitezimálisan kicsi, ezért gravitációs ereje nem befolyásolja a másik két test mozgását.



1. ábra

A μ tömegű testet is a rá ható gravitációs erők eredője tartja körpályán (*1. ábra*):

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \mu\omega_0^2\overrightarrow{\varrho},$$

vagyis

$$G\frac{M\mu}{r_1^3}\overrightarrow{r_1} + G\frac{m\mu}{r_2^3}\overrightarrow{r_2} = G\mu\frac{M+m}{(R+r)^3}\overrightarrow{\varrho}.$$

Másrészt a tömegközéppont definíciója szerint

$$\overrightarrow{\varrho} = \frac{M\overrightarrow{r_1} + m\overrightarrow{r_2}}{M+m},$$

amit behelyettesítve, és egyszerűsítve

$$\frac{M}{r_1^3}\overrightarrow{r_1} + \frac{m}{r_2^3}\overrightarrow{r_2} = \frac{M}{(R+r)^3}\overrightarrow{r_1} + \frac{m}{(R+r)^3}\overrightarrow{r_2}.$$

A fenti egyenlet két oldalán $\overrightarrow{r_1}$ és $\overrightarrow{r_2}$ együtthatói külön-külön meg kell egyezzenek, ahonnan $r_1 = r_2 = R + r$ adódik, vagyis a három test egy *szabályos háromszög* csúcsain helyezkedik el. A koszinusztétel alapján

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2R(R+r)\cos 60^\circ = R^2 + Rr + r^2.$$

Ezek szerint

1.2.1. μ és M távolsága: $r_1 = R + r$,

1.2.2. μ és m távolsága: $r_2 = R + r$,

1.2.3. μ és a tömegközéppont távolsága: $\varrho = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$.

1.3. A feladat az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések körfrekvenciájának meghatározása volt. Ehhez a versenyzők azt az útmutatást kapták, hogy tételezzék fel a rezgő test perdületének megmaradását. Ebből kiindulva és még az energia megmaradását is felírva hosszas számolás után az $\omega = \sqrt{7}\omega_0/2$ eredmény kapható (lásd a `http://www.ipho2011.org/contents/problems_solutions` honlapon a „hivatalos" megoldást).

Sajnos ez a megoldás **hibás!** A korlátozott háromtest-problémában (amikor az egyik test tömege elhanyagolhatóan kicsi a másik kettőé mellett) sem a kis test perdülete, sem a mechanikai energiája *nem* megmaradó mennyiség! Ténylegesen még a vizsgált pont stabilitása sem valósul meg, ha $m/M > 0{,}04$; márpedig a feladatban a $m = M$ speciális esetet kellett volna vizsgálni. Ekkor a kérdéses pont (a szabályos háromszög egyik csúcspontja) körül egyáltalán nem alakulhatnak ki harmonikus rezgések!

1.4. Az űrhajók egymás körül is ω szögsebességgel keringenek, így a relatív sebességük

$$v_{\mathrm{rel.}} = L\omega = \frac{2\pi}{T}L,$$

ahol L a „karok" hossza, T pedig a Föld keringési ideje. Behelyettesítve

$$v_{\mathrm{rel.}} = 996\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$