

3. feladat. Egyszerű atommagmodell

1. részfeladat.

a) Egyszerű kockarácsot feltételezve, mennyi a nukleonok kitöltési tényezője?

A kocka oldaléle (a rácsállandó) legyen a . Az egymással érintkező nukleongömbök sugara így $r = \frac{a}{2}$. Egy kockára éppen nyolc nyolcad-gömb jut, tehát az f kitöltési tényező egyszerűen egy gömb és a kocka térfogatának aránya:

$$(1) \quad f = \frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52.$$

b) Mekkora az A tömegszámú atommag tömegsűrűsége, töltéssűrűsége és sugara?

Az atommag tömegsűrűsége:

$$(2) \quad \rho_m = f \frac{m_N}{V_N} = f \frac{m_N}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = 0,52 \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3}(0,85 \cdot 10^{-15})^3\pi} \approx 3,40 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

Az atommag töltéssűrűsége:

$$(3) \quad \rho_c = \frac{f}{2} \frac{e}{V_N} = \frac{f}{2} \frac{e}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = \frac{0,52}{2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\frac{4}{3}(0,85 \cdot 10^{-15})^3\pi} \approx 1,63 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3,$$

ahol figyelembe vettük, hogy csak a protonoknak van töltésük, ugyanannyi neutronnak nincs.

Ha a nukleonok száma A , akkor az atommag térfogata így fejezhető ki:

$$(4) \quad V = \frac{AV_N}{f}.$$

Ennek megfelelően az atommag sugara:

$$(5) \quad R = r_N \left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} = \frac{0,85}{0,52^{1/3}} A^{1/3} \approx 1,06 \text{ fm} \cdot A^{1/3},$$

ahol az 1,06 fm-es szorzótényezőt a továbbiakban r_0 -lal jelöljük.

2. részfeladat.

Mekkora az A tömegszámú atommag kötési energiája?

A felületi nukleonokat egy $2r_N$ vastagságú héjban képzeljük el az atommag felszínén. Így kiszámíthatjuk a felületi nukleonok számát:

$$(6) \quad A_{\text{felület}} = f \frac{V_{\text{felület}}}{V_N},$$

ahol a felszíni gömbhéj térfogata:

$$(7) \quad V_{\text{felület}} = \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R - 2r_N)^3\pi.$$

A kötési energiához a felületi nukleonok feleakkora taggal járulnak hozzá, mint az atommag belsejében lévők:

$$(8) \quad E_b = (A - A_{\text{felület}})a_V + A_{\text{felület}}\frac{a_V}{2}.$$

Az (5), (6) és (7) összefüggések figyelembevételével a (8) kötési energiára ezt az eredményt kapjuk:

$$(9) \quad E_b = Aa_V - A_{\text{felület}}\frac{a_V}{2} = Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V = \\ = (15,8A - 38,2A^{2/3} + 61,6A^{1/3} - 33,1) \text{ MeV.}$$

3. részfeladat.

a) Mekkora az atommag elektrosztatikus energiája?

Ha a megadott képletben Q_0 helyére Ze értéket helyettesítünk, akkor az atommag elektrosztatikus energiájára ezt az összefüggést kapjuk:

$$(10) \quad U_C = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Vegyük figyelembe, hogy a protonok önmagukra nem hatnak, tehát (az útmutatás szerint) Z^2 helyére $Z(Z-1)$ -et kell írunk:

$$(11) \quad U_C = \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

b) *Hogyan írható fel az atommag teljes kötési energiája?*

A teljes kötési energia úgy írható fel, hogy a (9) kifejezésből kivonjuk a (11) Coulomb-tagot, mert a pozitív elektrosztatikus energia csökkenti az atommag kötési energiáját. (A kötési energiát úgy értelmezzük, mint az atommag nukleonokra bontásához szükséges minimális energiát.) A számolás során az atommag R sugarára az (5) összefüggést használjuk, továbbá kihasználjuk azt is, hogy $Z \approx \frac{A}{2}$:

$$(12) \quad \begin{aligned} E_b^{\text{teljes}} &= E_b - U_C = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2} \right). \end{aligned}$$

4. részfeladat.

a) *Mekkora a bomlástermékek együttes mozgási energiája?*

A bomlástermékek együttes mozgási energiáját a kötési energiák különbségéből, illetve a két fél mag $\left(\frac{Z}{2} = \frac{A}{4}\right)$ Coulomb-energiájának figyelembevételéből határozhatjuk meg:

$$(13) \quad \begin{aligned} E_{\text{mozg}}(d) &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2e^2}{4d^2} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{A^{5/3}}{4}(2^{-2/3}-1) - \frac{A^{2/3}}{2}(2^{1/3}-1) \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2e^2}{16d}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az Aa_V típusú fő járulékok kiesnek.

b) *Mekkora tömegszám esetén lehetséges bomlás?*

A mozgási energia fenti (13) kifejezésébe helyettesítsük be a $d = 2R\left(\frac{A}{2}\right)$ távolságot:

$$(14) \quad \begin{aligned} E_{\text{mozg}} &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2^{1/3}A^2e^2}{16 \cdot 2r_N A^{1/3} f^{-1/3}} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{e^2f^{1/3}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{80}(2^{-2/3}-1) + \frac{2^{1/3}}{128} \right] A^{5/3} - \frac{e^2f^{1/3}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{40}(2^{1/3}-1) \right] A^{2/3} = \\ &= (0,02203 A^{5/3} - 10,0365 A^{2/3} + 36,175 A^{1/3} - 33,091) \text{ MeV}. \end{aligned}$$

A megadott tömegszámokat numerikusan behelyettesítve a következő értékeket kapjuk:

$A = 100$	\rightarrow	$E_{\text{mozg}} = -33,95 \text{ MeV},$
$A = 150$	\rightarrow	$E_{\text{mozg}} = -30,93 \text{ MeV},$
$A = 200$	\rightarrow	$E_{\text{mozg}} = -14,10 \text{ MeV},$
$A = 250$	\rightarrow	$E_{\text{mozg}} = +15,06 \text{ MeV}.$

Modellünk szerint a bomlás akkor következik be, ha a mozgási energia értéke pozitív. Durva becsléssel ez nagyjából $A > 225$ esetén teljesül. (Pontosabb számítással a mozgási energia $A = 227$ -nél vált előjelet.)

5. részfeladat.

a) *Mekkora a nikkelmag gerjesztési energiája a transzfer reakció után?*

Ezt a részkérdést nemrelativisztikusan és relativisztikusan is meg lehet oldani. Az Olvasóra bízunk, hogy melyik módszert tartja egyszerűbbnek.

Nemrelativisztikus megoldás: Először is határozzuk meg, hogy mennyi tömeg alakul át energiává a reakcióban, vagyis határozzuk meg a reakció úgynevezett Q értékét. A tömegváltozás:

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta m &= (\text{tömeg})_{\text{reakció után}} - (\text{tömeg})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= (57,935\,35 + 12,000\,00) \text{ u} - (53,939\,62 + 15,994\,91) \text{ u} = \\ &= 0,000\,82 \text{ u} = 1,36 \cdot 10^{-30} \text{ kg}. \end{aligned}$$

(A fenti képletben u az atomi tömegegységet jelöli, amit régebben a.t.e., vagy az angol megfelelőjére utalva a.m.u. módon is írtak.) A tömeg növekedése azt mutatja, hogy a reakció után a termékek mozgási energiája kisebb kell legyen a kezdetinél. A reakció Q értéke:

$$(16) \quad \begin{aligned} Q &= (\text{mozgási energia})_{\text{reakció után}} - (\text{mozgási energia})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= -\Delta mc^2 = -1,224 \cdot 10^{-13} \text{ J} = -0,764 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Használunk kell (egy dimenzióban) a lendületmegmaradás, és az energiamegmaradás törvényét:

$$(17) \quad m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}),$$

$$(18) \quad E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) + Q = E_{\text{mozg}}(^{12}\text{C}) + E_{\text{mozg}}(^{58}\text{Ni}) + E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}),$$

ahol az utolsó tag a nikkelmag gerjesztési energiája. Mivel a berepülő oxigénmag és a kirepülő szénatommag sebessége megegyezik, a lendületmegmaradási egyenlet így egyszerűsödik:

$$(19) \quad [m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O}) = m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}).$$

A szén- és a nikkelmag mozgási energiáját kifejezhetjük a berepülő oxigén megadott mozgási energiája és az ismert magtömegek alapján, és ezt (egyszerű, bár kissé hosszadalmas számolás után) beírhatjuk az energia egyenletbe:

$$(20) \quad \begin{aligned} E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) &= Q + E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) - E_{\text{mozg}}(^{12}\text{C}) - E_{\text{mozg}}(^{58}\text{Ni}) = \\ &= Q + E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot [m(^{58}\text{Ni}) + m(^{12}\text{C}) - m(^{16}\text{O})]}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \approx \\ &\approx 10,9 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Érdekes észrevenni, hogy a végeredmény tört kifejezésének számlálójában lévő első szögletes zárójelben lényegében az átadott tömeg (egy alfa-részecske) szerepel, míg a második szögletes zárójelben a vasatommag tömege található.

Relativisztikus megoldás: Relativisztikusan így írhatjuk fel az energia- és az impulzusmegmaradást:

$$(21) \quad \begin{aligned} m(^{54}\text{Fe})c^2 + \frac{m(^{16}\text{O})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m(^{12}\text{C})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{12}\text{C})}{c^2}}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}, \\ \frac{m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{12}\text{C})}{c^2}}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}. \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben mindenhol a nyugalmi tömegek szerepelnek. A magasan gerjesztett nikkelmag nyugalmi tömege (m^*) nagyobb, mint az alapállapotú nikkelé, ezt jelzi a csillag.

Ha figyelembe vesszük, hogy az oxigén- és a szénmag sebessége megegyezik, akkor az egyenletek egyszerűsödnek:

$$(22) \quad \begin{aligned} m(^{54}\text{Fe}) + \frac{m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m^*(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}, \\ \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} &= \frac{m^*(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Ha az utóbbi két egyenletet elosztjuk egymással, akkor a nikkelmag sebességét ki tudjuk fejezni az oxigén sebességével és tömegadatokkal:

$$(23) \quad v(^{58}\text{Ni}) = \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot v(^{16}\text{O})}{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] + m(^{54}\text{Fe})\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}}.$$

Az oxigén sebességét pedig a mozgási energia relativisztikus alakjából fejezhetjük ki:

$$(24) \quad E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) = \frac{m(^{16}\text{O})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} - m(^{16}\text{O})c^2,$$

amiből kissé fáradságos átrendezés után

$$(25) \quad v(^{16}\text{O}) = \sqrt{1 - \left(\frac{m(^{16}\text{O})c^2}{E_{\text{mozg}}(^{16}\text{O}) + m(^{16}\text{O})c^2} \right)^2} \cdot c \approx 0,08172 \cdot c \approx 2,45 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ezt az értéket (23)-ba helyettesítve megkapjuk a nikkelmag sebességét:

$$(26) \quad v(^{58}\text{Ni}) = \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot v(^{16}\text{O})}{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] + m(^{54}\text{Fe}) \sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} \approx 1,69 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mindezek után kiszámíthatjuk a gerjesztett állapotú nikkelmag tömegét:

$$(27) \quad m^*(^{58}\text{Ni}) = [m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})] \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{58}\text{Ni})}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2(^{16}\text{O})}{c^2}}} \cdot \frac{v(^{16}\text{O})}{v(^{58}\text{Ni})} \approx 57,95 \text{ u}.$$

Ezek után a nikkelmag gerjesztési energiájának kiszámítása már gyerekjáték:

$$E_{\text{exc}} = [m^*(^{58}\text{Ni}) - m(^{58}\text{Ni})]c^2 = 10,8636 \text{ MeV}.$$

Három értékes jegyre pontosan visszakaptuk a nemrelativisztikusan számolt végeredményt, ami azt mutatja, hogy jogos volt a nemrelativisztikus számolás.

b) Mekkora a nikkelmag által kibocsátott gamma-foton energiája a kétféle vonatkoztatási rendszerben?

Újra az energia- és az impulzusmegmaradás törvényét kell felírunk a nikkelmagra. Az egyenletek bal oldalára a gerjesztett állapotot jellemző tagokat írjuk, míg a jobb oldalukra a „legerjesztés” utáni tagokat:

$$(28) \quad \begin{aligned} E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) &= E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}}, \\ 0 &= p_\gamma - p_{\text{visszalökődés}}, \end{aligned}$$

ahol az impulzusokat az atom- és magfizikában megszokott módon p -vel jelöltük. A fotonok energiája és impulzusa között a következő általános összefüggés érvényes:

$$(29) \quad E_\gamma = p_\gamma c.$$

A nikkelmag visszalökődési energiáját klasszikusan számolhatjuk, hiszen az előzőekben láttuk, hogy a problémát jól kezelhetjük nemrelativisztikusan is:

$$(30) \quad E_{\text{visszalökődés}} = \frac{p_{\text{visszalökődés}}^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{p_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}.$$

Eredményünket helyettesítsük be a (28) energiamegmaradási egyenletébe:

$$(31) \quad E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2},$$

ami E_γ -ra nézve egy másodfokú egyenlet. Ennek fizikailag értelmes megoldása: $E_\gamma = 10,8625 \text{ MeV}$, vagyis ennyi a gamma-foton energiája abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a gerjesztett nikkelmag nyugalomban van. Mindezek után már könnyen meghatározhatjuk a nikkelmag visszalökődési energiáját:

$$(32) \quad E_{\text{visszalökődés}} = E_{\text{exc}}(^{58}\text{Ni}) - E_\gamma = 1,1 \text{ keV}.$$

Mivel a gammát sugárzó nikkelmag nagy sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerben a detektor felé, így az észleléskor a detektor a relativisztikus Doppler-effektus szerint megváltozott frekvenciájúnak „érzi” a vele szembe mozgó gamma-fotont:

$$(33) \quad f_{\text{detektor}} = f_{\gamma, \text{kisugárzott}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

A foton energiája és frekvenciája között érvényes a Planck-formula ($E = hf$), vagyis a fotonenergiákra is érvényes a Doppler-képlet:

$$(34) \quad E_{\text{detektor}} = E_{\gamma, \text{kisugárzott}} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

ahol $\beta = \frac{v}{c}$. A nikkelmag sebességét a (26) összefüggés alapján számítottuk ki, aminek a felhasználásával megkapjuk a detektor által észlelt gamma-foton energiáját: $E_{\text{detektor}} = 10,924 \text{ MeV}$.