2. feladat. Kéményfizika

1. részfeladat.

a) Mekkora minimális magasság mellett működik hatékonyan a kémény?

Jelölje $p(z)$ a külső légnyomást z magasságban. Jó közelítéssel:

(1) $$p(z) = p(0) - \varrho_{\text{levegő}} g z,$$

ahol $p(0)$ a talajszinti légnyomás. A kéményben áramló füstre alkalmazhatjuk a Bernoulli-törvényt:

(2) $$\frac{1}{2}\varrho_{\text{füst}} v(z)^2 + \varrho_{\text{füst}} g z + p_{\text{füst}}(z) = \text{állandó},$$

ahol $p_{\text{füst}}(z)$ a füst nyomása z magasságban, $\varrho_{\text{füst}}$ a füst sűrűsége, és $v(z)$ jelöli a füst sebességét. (Felhasználtuk azt a közelítést, hogy a füst sűrűsége nem változik a kéményben.)

A Bernoulli-törvény segítségével két pontot hasonlítunk össze; a talajszinten lévő kazánt (ahol a füst jó közelítéssel még nem mozog) és a kémény tetőpontját. A kémény akkor működik, ha a felső nyílásában a nyomás nagyobb (vagy egyenlő), mint a külső légnyomás (1). Minimális kéménymagasságnál az egyenlőség teljesül:

(3) $$\frac{1}{2}\varrho_{\text{füst}} v(h)^2 + \varrho_{\text{füst}} g h + p_{\text{füst}}(h) =$$

$$= \frac{1}{2}\varrho_{\text{füst}} v(h)^2 + \varrho_{\text{füst}} g h + p(0) - \varrho_{\text{levegő}} g h \approx p(0),$$

amiből kiszámíthatjuk a füst sebességét:

(4) $$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1\right)}.$$

A kémény akkor működik hatékonyan, ha a kazánból származó összes égéstermék kijut a légkörbe a kémény tetején, vagyis

(5) $$v(h) \geq \frac{B}{A}.$$

A (4) és (5) egyenletek összevetésével a kémény magasságára a következő feltételt kapjuk:

(6) $$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{1}{\dfrac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1}.$$

A kazánban a füstöt ideális gázként kezeljük, melynek nyomása a talajszinti $p(0)$ légnyomás. Így a levegő és a füst sűrűsége között a következő összefüggés írható fel:

(7) $$\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} = \frac{T_{\text{füst}}}{T_{\text{levegő}}},$$

melynek segítségével megkaphatjuk a kémény minimális magasságát:

(8) $$h \geq \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{\text{levegő}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{levegő}}} = \frac{B^2}{A^2}\frac{1}{2g}\frac{T_{\text{levegő}}}{\Delta T} = h_{\text{min}}.$$

b) Milyen magas a meleg vidéken épült kémény?

A (8) összefüggés alapján:

(9) $$\frac{h_{\text{meleg}}}{h_{\text{hideg}}} = \frac{\dfrac{T_{\text{meleg}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{meleg}}}}{\dfrac{T_{\text{hideg}}}{T_{\text{füst}} - T_{\text{hideg}}}} \implies h_{\text{meleg}} = 145\ \text{m}.$$

c) Hogyan változik a gázok sebessége a kéményben?

A (4) és a (7) összefüggések alapján láthatjuk, hogy a kéményben a füst sebessége:

(10) $$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{füst}}} - 1\right)} = \sqrt{2gh\left(\frac{T_{\text{füst}}}{T_{\text{levegő}}} - 1\right)} = \sqrt{2gh\left(\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}\right)}.$$

Mivel abban a közelítésben dolgozunk, ahol a füst sűrűsége állandó, a kontinuitási egyenlet ($Av =$ állandó) következménye az, hogy az állandó keresztmetszetű kéményben állandó a füst áramlási sebessége. Minimális kéménymagasság esetén ez az állandó sebesség: $v = B/A$. Vegyük észre, hogy a kazánban a füst még gyakorlatilag áll, majd a kéménybe történő belépéskor egy rövid szakaszon a füstgázok állandó értékre gyorsulnak fel.

d) Hogyan változik a kéményben a gáz nyomása a magasság függvényében?

A Bernoulli-egyenletet alkalmazzuk a kémény tetejére és egy tetszőleges, z magasságú pontra. Kihasználjuk, hogy a füstsebesség állandó:

$$p(h) + \frac{1}{2}\varrho_{\text{füst}}v^2 + \varrho_{\text{füst}}gh = p(z) + \frac{1}{2}\varrho_{\text{füst}}v^2 + \varrho_{\text{füst}}gz. \tag{11}$$

Használjuk fel az (1) egyenletet $p(h)$ kifejezésére: $p(h) = p(0) - \varrho_{\text{levegő}}gh$, és fejezzük ki a kérdéses nyomást:

$$p(z) = p(0) - (\varrho_{\text{levegő}} - \varrho_{\text{füst}})gh - \varrho_{\text{füst}}gz. \tag{12}$$

Láthatjuk, hogy a talajszinten ($z = 0$) a kéményben a nyomás kisebb a külső légnyomásnál, vagyis amikor a füst a kazánból a kéménybe jut, akkor nemcsak a sebessége változik (növekszik), a nyomása is ugrásszerűen lecsökken.

2. részfeladat.

a) Mennyi a napkémény hatásfoka?

A kémény által Δt idő alatt kibocsátott forró levegő mozgási energiája így írható fel a (10) összefüggés segítségével:

$$E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}(Av\Delta t\varrho_{\text{forró}})v^2 = (Av\Delta t\varrho_{\text{forró}})gh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}. \tag{13}$$

Jelöljük a kémény léghozamát w-vel, ami megmutatja a kéményen másodpercenként áthaladó levegő tömegét ($w = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = Av\varrho_{\text{forró}}$). A kémény teljesítménye így fejezhető ki w-vel:

$$P_{\text{hasznos}} = wgh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}. \tag{14}$$

A napsugárzás által leadott teljesítmény a G napállandótól és az S felülettől függ:

$$P_{\text{sugárzás}} = GS = wc\Delta T, \tag{15}$$

ahol c a levegő fajhője. Így a napkémény maximális elméleti hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{sugárzás}}} = \frac{gh}{cT_{\text{levegő}}}. \tag{16}$$

b) Hogyan függ a hatásfok a magasságtól?

A magasságfüggés lineáris.

3. részfeladat.

a) Mekkora a Manzanares-ben épült napkémény hatásfoka?

A hatásfok:

$$\eta = \frac{gh}{cT_{\text{levegő}}} = 0{,}0064 = 0{,}64\%. \tag{17}$$

b) Mekkora teljesítménnyel működik a napkémény Manzanares-ben?

A napkémény teljesítménye:

$$P = GS\eta = G(r^2\pi)\eta = 45\ \text{kW}. \tag{18}$$

c) Mennyi energiát állít elő egy napsütéses napon a manzanares-i napkémény?

Ha napi nyolc óra napsütést tételezünk fel, akkor az előállított energia 360 kWh.

4. részfeladat.

a) Mekkora a napkéménybe lépő levegő hőmérséklet ugrása?

Fejezzük ki a w léghozamot a (10) és a (15) összefüggésekkel:

$$w = Av\varrho_{\text{forró}} = A\sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{\text{levegő}}}}\,\varrho_{\text{forró}}, \tag{19}$$

$$w = \frac{GS}{c\Delta T},$$

amiből kifejezhetjük a ΔT hőmérsékletugrást:

$$\Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{\text{levegő}}}{A^2 c^2 \varrho_{\text{forró}}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9{,}1\ \mathrm{K}. \tag{20}$$

b) Mekkora a napkémény léghozama Manzanares-ben?

A (19) ikerösszefüggés alapján:

$$w = 760\ \mathrm{kg/s}. \tag{21}$$