Elméleti feladatok

1. feladat. Tükörtöltés egy fémtárgyban

1. részfeladat.

a) *Mekkora az elektromos potenciál értéke a gömbön?*

Mivel a gömb földelt, az elektromos potenciál a felszínén zérus.

b) *A tükörtöltés q' nagyságának és r' helyzetének meghatározása.*

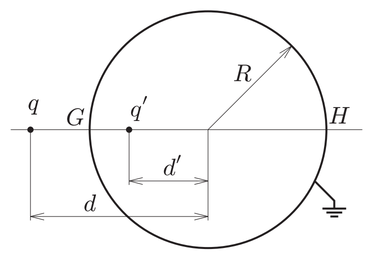
A feladat nem követeli meg a tükörtöltés módszerének igazolását, csupán a tükörtöltés nagyságának és helyzetének meghatározását kéri a módszer ismeretében. E két paraméter meghatározásához elegendő, ha a gömb két különböző pontjában előírjuk, hogy az elektromos potenciál legyen zérus. Célszerű a két töltés egyenesén fekvő G és H pontot választani (*1. ábra*):

$$\Phi_G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d-R} + \frac{q'}{R-d'}\right) = 0,$$

$$\Phi_H = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d+R} + \frac{q'}{d'+R}\right) = 0.$$

Egyszerűen adódik, hogy az egyenletrendszer megoldása q'-re és d'-re:

$$q' = -q\frac{R}{d}, \qquad d' = \frac{R^2}{d}.$$



1. ábra. A töltés, a tükörtöltés és a földelt fémgömb

Megjegyzés. A kapott eredményhez két elemi geometriai tétel is kapcsolódik. Egyrészt, mivel $dd' = R^2$, a töltést és a tükörtöltést egy olyan inverzió (gömbi tükrözés) viszi át egymásba, melynek alapgömbje a földelt fémgömb. Másrészt, az a tény, hogy a két töltés eredő potenciálja a gömbön nulla, azt jelenti, hogy a gömb pontjainak a két töltéstől mért távolságaránya állandó, tehát a gömb a két töltéshez tartozó Apollóniusz-gömb.

c) *Mekkora erő hat a q töltésre?*

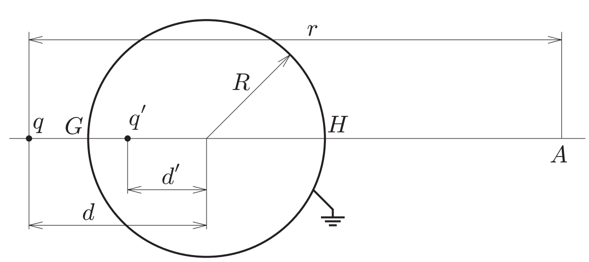
Minthogy a fémgömb elektromos tere a gömbön kívül megegyezik a q' tükörtöltés terével, a gömb és a q töltés közti erő megegyezik a q és q' töltések között ható Coulomb-erővel:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot|q'|}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2}.$$

Mivel q és q' ellentétes előjelűek, ezért a köztük ható F erő vonzó.

2. részfeladat.

a) *Mekkora az A pontban az elektromos térerősségvektor?*



2. ábra. Az A pontban a földelt gömb részlegesen leárnyékolja az elektromos teret

A földelt gömb hatását helyettesíthetjük a q' tükörtöltéssel, így az elektromos tér két ponttöltés terének eredőjeként adódik:

$$\boldsymbol{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{\left(r-d+d'\right)^2}\right)\boldsymbol{e}_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{Rd}{\left(rd+R^2-d^2\right)^2}\right)\boldsymbol{e}_A,$$

ahol $\boldsymbol{e}_A$ a q töltéstől A-ba mutató egységvektor.

b) Hogyan közelíthető ez a formula, ha $r \gg d$?

Ha $r \gg d$, akkor az előző formula második tagja:

$$\frac{Rd}{\left(rd+R^2-d^2\right)^2} = \frac{R}{r^2 d}\left(1 - \frac{d}{r} + \frac{R^2}{rd}\right)^{-2} \approx \frac{R}{r^2 d}\left(1 + \frac{2d}{r} - \frac{2R^2}{rd}\right).$$

Ezt felhasználva az elektromos térerősségre az

$$\boldsymbol{E}_A \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{R}{d} + \frac{2R}{r}\left(\frac{R^2}{d^2} - 1\right)\right)\boldsymbol{e}_A$$

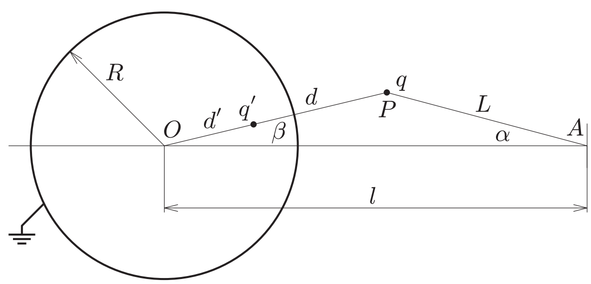
közelítő formula adódik. Látható, hogy a fémgömb árnyékoló hatása mellett is nagy távolság esetén a távolság négyzetével csökken az elektromos térerősség.

c) Mi a feltétele a teljes leárnyékolásnak?

A korábban levezetett képletekből látható, hogy a $d \to R$ határesetben válna teljessé a leárnyékolás.

3. részfeladat.

a) Mekkora és milyen irányú a kitérített ingára ható elektrosztatikus erő?



3. ábra. Az α szöggel kitérített inga és a rá ható tükörtöltés

A fémgömb által kifejtett erő megegyezik a töltés és a tükörtöltés között fellépő Coulomb-erővel. Az OAP háromszögre felírt koszinusztétel alapján

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL\cos\alpha}.$$

Így a q töltésre ható erő nagysága:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\left(d-d'\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha - R^2\right)^2}.$$

Az erő a gömb középpontja felé mutat.

b) Mekkora az erő fonalra merőleges komponense?

Az OAP háromszög P csúcsnál levő külső szöge $\alpha+\beta$, így a keresett komponens $F_\perp = F\sin(\alpha+\beta)$. A szinusztétel alapján $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{l}{d}\sin\alpha$, így:

$$F_\perp = F\frac{l}{d}\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rl\sin\alpha}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha - R^2\right)^2}.$$

c) Mennyi az inga kis rezgéseinek frekvenciája?

A matematikai inga mozgásegyenlete $mL\ddot{\alpha} = -F_\perp$. Kicsiny kitérések esetén $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, így a mozgásegyenlet alakja ekkor:

$$mL\ddot{\alpha} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rl}{\left(\left(l-L\right)^2 - R^2\right)^2}\alpha,$$

ahonnan a kis rezgések körfrekvenciája:

$$\omega = \frac{q}{\left(l-L\right)^2 - R^2}\sqrt{\frac{Rl}{4\pi\varepsilon_0 mL}}.$$

4. részfeladat.

A feladatnak talán ez a része a legérdekesebb, mert ügyes gondolatmenetekkel szinte számolás nélkül megoldható. Jelölje $E_{\text{kölcs}}$ a q töltés és a polarizált gömb közti elektrosztatikus kölcsönhatási energiát, legyen $E_{\text{gömb}}$ a gömbön polarizált töltéseloszlás elektrosztatikus energiája, és $E_{\text{össz}}$ a teljes rendszer energiája. A feladat három alkérdésben e három energia meghatározását kéri. Világos, hogy

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kölcs}} + E_{\text{gömb}},$$

tehát bármely két energia ismeretében a harmadik könnyen meghatározható. Mi most egymástól függetlenül határozzuk meg a három energiát, és a végén ellenőrizzük, hogy teljesül rájuk a fenti feltétel.

a) Mennyi a q töltés és a gömbön levő töltések közti $E_{\text{kölcs}}$ elektrosztatikus kölcsönhatási energia?

Ez a kölcsönhatási energia negatív, hiszen a q töltés és a gömb vonzzák egymást. A kölcsönhatási energia abszolút értéke megegyezik azzal a munkával, melyet a gömb vonzása ellenében végeznünk kell, hogy a q töltést a végtelenbe távolítsuk, miközben *a töltések a gömbön nem mozdulnak el.* A gömbön polarizált töltés hatása a gömbön kívül pont olyan, mint a q' tükörtöltésé, tehát úgy is képzelhetjük, hogy q-t a rögzített q' tükörtöltéstől távolítjuk el. Így a kölcsönhatási energia megegyezik a q és q' közti elektrosztatikus energiával:

$$E_{\text{kölcs}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qq'}{d-d'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2R}{d^2-R^2}.$$

b) Mennyi a gömbön levő töltéselrendeződés $E_{gömb}$ elektrosztatikus energiája?

Gondolatban tekintsük a polarizált gömböt sok kis q_i töltésből álló rendszernek, melyek a gömbfelszín $\boldsymbol{r}_i$ pontjaiban vannak. A keresett energia a párkölcsönhatási energiák összege:

$$E_{\text{gömb}} = \sum_{i<j} E_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_{i}\;\sum_{j\neq i} E_{i,j},$$

ahol

$$E_{i,j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} = q_i\Phi_j(\boldsymbol{r}_i) = q_j\Phi_i(\boldsymbol{r}_j).$$

(Itt $\Phi_i(\boldsymbol{r})$ a q_i töltés elektromos potenciálját jelöli az $\boldsymbol{r}$ helyen.) Ezt felhasználva:

$$E_{\text{gömb}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_j \Phi_j(\boldsymbol{r}_i).$$

De a gömb felszínén, illetve azon kívül a polarizált töltésrendszer hatása helyettesíthető a tükörtöltés hatásával, tehát $\sum\limits_j \Phi_j(\boldsymbol{r}_i) = \Phi_{q'}(\boldsymbol{r}_i)$. Így

$$E_{\text{gömb}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\Phi_{q'}(\boldsymbol{r}_i) = \frac{q'}{2}\sum_i \Phi_i(\boldsymbol{d}').$$

A fémgömbben, a tükörtöltés $\boldsymbol{d}'$ helyén a zérus elektromos potenciált a gömbön polarizált töltések és a gömbön kívül a $\boldsymbol{d}$ pontban található q töltés potenciáljának szuperpozíciója alakítja ki, tehát $\sum_i \Phi_i(\boldsymbol{d}') = -\Phi_q(\boldsymbol{d}')$. Ezt felhasználva végül:

$$E_{\text{gömb}} = -\frac{q'}{2}\Phi_q(\boldsymbol{d}') = \frac{-1}{2}E_{q,q'} = \frac{-1}{2}E_{\text{kölcs}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}.$$

Látható, hogy az eredményhez az összegzéseket ténylegesen nem kellett elvégeznünk, csak ügyes okoskodásokra, a tükörtöltés módszer és a szuperpozíció elv pontos ismeretére volt szükségünk.

c) Mennyi a rendszer teljes elektrosztatikus energiája?

A teljes kölcsönhatási energia negatív, abszolút értéke megegyezik azzal a munkával, ami a q töltésnek a földelt fémgömbtől végtelen meszire való eltávolításához szükséges, *miközben a fémgömbön is szabadon vándorolhatnak a töltések.* Az 1. részfeladat c) pontjában már meghatároztuk a gömb középpontjától d távolságra levő q töltésre ható $F(d)$ erőt, tehát

$$E_{\text{össz}} = -\int_{x=d}^{\infty} F(x)dx = -\frac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=d}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2-R^2\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{q^2R}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2-R^2}\right]_{x=d}^{\infty} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2R}{d^2-R^2}.$$

Látható, hogy teljesül az $E_{\text{össz}} = E_{\text{kölcs}} + E_{\text{gömb}}$ egyenlőség, és az energiák aránya

$$E_{\text{össz}} : E_{\text{kölcs}} : E_{\text{gömb}} = (-1) : (-2) : (+1).$$