

**Megoldás.** Kis kitérések esetén az ingák lengésideje a kitéréstől független, emiatt a golyók mindig a felfüggesztési pont alatt fognak ütközni. Jelöljük az  $n$ -edik ütközés után a gyorsabban mozgó golyó sebességét  $v_n$ -nel, a lassabban mozgóét pedig  $u_n$ -nel, és számítsuk ki ezek nagyságát!

Közvetlenül az első ütközés előtt a kimozdított (a rajzon a jobb oldali) golyó sebessége  $v_0 = \omega \cdot d$  (ahol  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  a harmonikus mozgást végző inga körfrekvenciája), a másik golyó pedig áll,  $u_0 = 0$ . A rendszer tömegközéppontjának sebessége  $v_0/2$ , a tömegközépponthez viszonyított sebességek tehát az első ütközés előtt

$$v_0^{(\text{tkp})} = \frac{v_0}{2}, \quad \text{illetve} \quad u_0^{(\text{tkp})} = -\frac{v_0}{2}.$$

Az ütközés során a fenti sebességek nagysága  $k$ -szorosára csökken, értékük tehát

$$v_1^{(\text{tkp})} = k \frac{v_0}{2} \quad \text{és} \quad u_1^{(\text{tkp})} = -k \frac{v_0}{2}$$

lesz. Visszatérve az eredeti (az ingák felfüggesztési pontjához rögzített) koordináta-rendszerbe, a golyók sebessége:

$$v_1 = \frac{v_0}{2}(1+k), \quad \text{valamint} \quad u_1 = \frac{v_0}{2}(1-k).$$

Az ingák (ha a közegellenállás hatása egy-egy lengés alatt nem számottevő) ugyanekkora sebességgel érkeznek vissza a pályájuk legmélyebb pontjához, ahol ismét ütköznek.

A második ütközés után a (most is  $v_0/2$  sebességgel mozgó) tömegközépponthez viszonyítva a golyók sebessége

$$v_2^{(\text{tkp})} = k^2 \frac{v_0}{2} \quad \text{és} \quad u_2^{(\text{tkp})} = -k^2 \frac{v_0}{2},$$

az eredeti rendszerben tehát

$$v_2 = \frac{v_0}{2}(1+k^2), \quad u_2 = \frac{v_0}{2}(1-k^2).$$

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy általában

$$v_n^{(\text{tkp})} = k^n \frac{v_0}{2} \quad \text{és} \quad u_n^{(\text{tkp})} = -k^n \frac{v_0}{2},$$

illetve

$$v_n = \frac{v_0}{2}(1+k^n) \quad \text{és} \quad u_n = \frac{v_0}{2}(1-k^n)$$

lesz a golyók sebessége. (Páratlan számú ütközés után a bal oldali, páros számú ütközést követően pedig a jobb oldali golyó mozog nagyobb ( $v_n$ ) sebességgel,  $u_n$  pedig a másik testre vonatkozik.)

Ha  $k < 1$  és  $n$  „elegendően nagy”, akkor  $k^n$  tetszőlegesen kicsivé válik (azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ ), s így mindkét golyó sebessége  $v_0/2$  lesz. Mivel a lengések amplitúdója a maximális sebességgel arányos, és a  $v_0$ -hoz tartozó kitérés  $d$  volt, az együtt mozgó két golyó legnagyobb kitérése  $d/2$  lesz. Ezek után már nem történnek ütközések, és a mozgást – hosszabb idő elteltével – csak a légellenállás fogja megállítani.