Megoldás. Ha a lemez vastagsága d, anyagának sűrűsége pedig ϱ, akkor a nagy körlap tömege

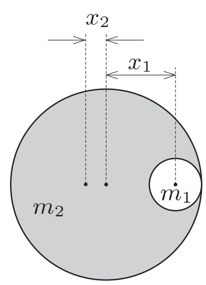
$$m_0 = R^2\pi\varrho d,$$

a kivágott kis körlap tömege

$$m_1 = r^2\pi\varrho d,$$

és a maradék darab tömege

$$m_2 = m_0 - m_1 = \left(R^2 - r^2\right)\pi\varrho d.$$



1. ábra

A kivágott kis körlap tömegközéppontja a körlemez középpontjától mérve $x_1 = R-r$ távolra esik. A „lyukas körlap" tömegközéppontja valamekkora x_2 távolságra kerül a körlemez középpontjától, és a feladat szövege szerint $x_2 \le \dfrac{R}{100}$ (*1. ábra*).

A nagy körlap a kis körlapból és a lyukas körlapból áll össze, így a nagy körlap tömegközéppontja (ami nyilván a geometriai középpontjába esik) a két összetevő tömegközéppontjainak koordinátáiból és a tömegeikből számítható:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 - m_2x_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Innen

$$x_2 = \frac{m_1}{m_2}x_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2}(R - r) = \frac{r^2}{R + r} \le \frac{R}{100}.$$

Legyen a kérdéses r/R arány a, vagyis $r = aR$. (Nyilván $0 < a < 1$.) Ezzel a jelöléssel a fenti egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2R^2}{aR + R} \le \frac{R}{100}, \qquad \text{vagyis} \qquad 100\,a^2 \le a + 1.$$

Határesetben (amikor $x_2 = R/100$) egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk, amelynek pozitív gyöke:

$$a_0 = \frac{1 + \sqrt{401}}{200} \approx 0{,}105.$$

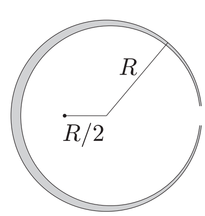
Ha a r/R arány nem nagyobb ennél az értéknél, akkor a lyukas körlemez tömegközéppontja legfeljebb $R/100$ távolságra lehet a tömör körlemez középpontjától.

Megjegyzés. A feladat általánosabban, $x_2 = kR$ tömegközéppont-eltolódásra is megoldható. A sugarak $a = r/R$ aránya ilyenkor

$$a = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k},$$

illetve a fordított összefüggés:

$$k = \frac{a^2}{a + 1}.$$



2. ábra

Ha $k \ll 1$, akkor $k \approx a^2$, vagyis a tömegközéppont (relatív) eltolódása a kivágott rész (relatív) területével egyezik meg. Érdekes a másik határeset is: ha $a \approx 1$ (vagyis ha szinte az egész körlemezt eltávolítjuk), akkor a maradék „vonalszerű" alakzat tömegközéppontját $k = 1/2$, vagyis $x_2 = R/2$ jellemzi (*2. ábra*).