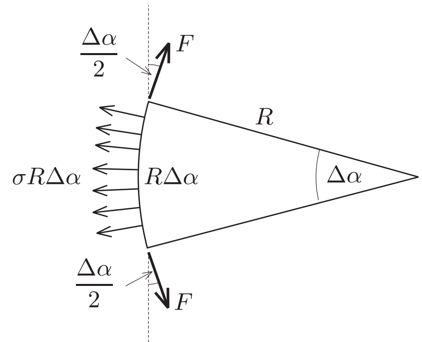
I. megoldás. Tekintsük a jobb oldali hártya kiszúrása után kialakuló egyensúlyi állapotot! A bal oldali hártya a felületi feszültség miatt kicsit összehúzódik, ettől a hajszál megfeszül és meggörbül. Ha a hajszál valamely részén a görbületi sugár R, és a hajszálban ébredő feszítőerő F, a közöttük fennálló kapcsolat:

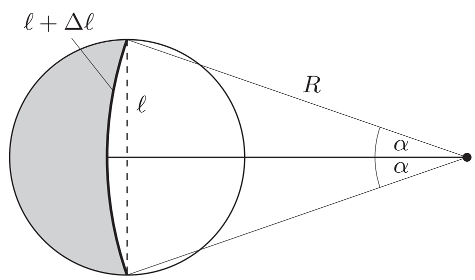
(1) $$F = \sigma R,$$

ahol σ a hártya teljes (annak mindkét oldalát figyelembe vevő) felületi feszültsége. Ezt az összefüggést pl. a hajszál egy kicsiny, $\Delta\alpha$ középponti szöggel jellemezhető, tehát $R\Delta\alpha$ hosszú darabkájára felírt erőegyensúly egyenletéből kaphatjuk meg (*1. ábra*):

$$2F\,\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F\,\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \sigma\, R\Delta\alpha.$$



1. ábra



2. ábra

Mivel a hajszál súlya elhanyagolható, az F feszítőerő a szál minden pontjában *ugyanakkora* kell legyen, így az (1) egyenlet szerint a görbületi sugár is mindenhol ugyanakkora. A szál tehát *körív* alakú lesz.

Legyen e körív középponti szöge 2α, sugara pedig R (*2. ábra*). Az ábráról leolvasható, hogy a körívhez tartozó húr hossza

(2) $$\ell = 2R\sin\alpha,$$

a megnyúlt hajszál hossza a körív ívhossza:

$$\ell + \Delta\ell = 2R\alpha,$$

vagyis a szál megnyúlása

(3) $$\Delta\ell = 2R(\alpha - \sin\alpha).$$

Feltételezhetjük, hogy a szál megnyúlása és ezzel együtt az α szög is igen kicsiny, így alkalmazható a feladat szövegében megadott közelítés. Emiatt a szál megnyúlása – a (2) összefüggés $\ell \approx 2R\alpha$ alakját is felhasználva – így írható:

(4) $$\Delta\ell = \frac{\ell}{6}\,\alpha^2.$$

A hajszálban ható érintő irányú erő kifejezhető megnyúlással:

$$F = \frac{EA\Delta\ell}{\ell},$$

ahonnan (1), (2) közelítő alakja és (4) felhasználásával a kérdéses szögre

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\ell\sigma}{EA}},$$

a hajszál megnyúlására pedig

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{6}\left(\frac{3\ell\sigma}{EA}\right)^{\frac{2}{3}}$$

végeredmény adódik.

II. megoldás. A feladat megoldható az energiaminimum elve alapján is. Az egyik hártya átszúrása után kialakuló egyensúlyi állapotban a teljes energiája (ami a felületi feszültségből származó E_f energia és a megfeszülő hajszál E_r rugalmas energiájának összege) minimális kell legyen:

$$E_\mathrm{t} = E_\mathrm{f} + E_\mathrm{r} = \text{minimum}.$$

Az I. megoldás 2. ábrájának jelöléseit használva a felületi energia:

$$E_\mathrm{f} = \sigma\, t,$$

ahol

$$t = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2} - R^2\,(\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha)$$

az épen maradt (az ábrán szürkén jelölt) hártya területe. Mivel (a megadott közelítő formula szerint)

$$\sin\alpha\,\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \approx \frac{1}{2}\left(2\alpha - \frac{1}{6}(2\alpha)^3\right) = \alpha - \frac{2}{3}\,\alpha^3,$$

továbbá $R \approx \ell/(2\alpha)$, a hártya felületi energiája az α szög függvényében:

$$E_\mathrm{f}(\alpha) = E_0 - \frac{\ell^2\sigma}{6}\,\alpha.$$

(Itt E_0 egy konstans, tehát az energiaminimum szempontjából érdektelen állandó.)

A megfeszített hajszálban létrejövő rugalmas feszítőerő

$$F = \frac{EA}{\ell}\,\Delta\ell,$$

vagyis éppen akkora, mint egy $D = \dfrac{EA}{\ell}$ rugóállandójú rugóban ébredő erő. A rugalmas energia a rugó megfelelő képletének felhasználásával számolható:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}D(\Delta\ell)^2 = \frac{EA}{2\ell}(\Delta\ell)^2,$$

ami az I. megoldás (4) képletének felhasználásával így írható:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{72}EA\ell\,\alpha^4.$$

A teljes energia:

$$E_\mathrm{t}(\alpha) = E_0 - \frac{\ell^2\sigma}{6}\,\alpha + \frac{1}{72}EA\ell\,\alpha^4,$$

melynek minimumát a derivált eltűnése adja meg:

$$E_\mathrm{t}'(\alpha) = -\frac{\ell^2\sigma}{6} + \frac{1}{18}EA\ell\,\alpha^3 = 0,$$

vagyis az egyensúlyi állapotban

$$\alpha = \alpha_0 = \left(\frac{3\ell\sigma}{EA}\right)^{\frac{1}{3}},$$

a megnyúlás pedig

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{6}\left(\frac{3\ell\sigma}{EA}\right)^{\frac{2}{3}},$$

összhangban az I. megoldás végeredményével.

Megjegyzés. Az egyensúlyi állapotban a rendszer energiája nem egyezik meg a jobb oldali hártya átszúrása utáni pillanatnak megfelelő „kezdeti” energiával, vagyis

$$E_\mathrm{t}(\alpha_0) \neq E_\mathrm{t}(\alpha = 0).$$

Aki az energiamegmaradásra hivatkozva a felületi energia csökkenését a rugalmas energia növekedésével vette egyenlőnek, hibás eredményt kapott. Ténylegesen $|\Delta E_\mathrm{f}| = 4\cdot\Delta E_\mathrm{r}$, tehát a rendszer energiája az egyensúly beálltáig *csökken.*