Megoldás. A korong talajra helyezésekor a talajjal érintkező pont sebessége nagyobb, mint a tömegközéppont sebessége, ezért a korong kipörög („köszörül"). A súrlódási erő miatt a korong középpontja egyre nagyobb sebességgel mozog, a forgás szögsebessége pedig egyre csökken. Egy bizonyos úthossz megtétele után a korong tisztán gördül, ettől kezdve a tapadási erő nem végez munkát.

Jelöljük a korong tömegközéppontjának gyorsulását a-val, pillanatnyi sebességét v-vel, a korong szöggyorsulását β-val, pillanatnyi szögsebességét ω-val, tehetetlenségi nyomatékát Θ-val, a súrlódási erőt F-fel, végül pedig Δt-vel az indítás és a tisztán gördülés között eltelt időt (*1. ábra*).

Felírhatóak a következő egyenletek:

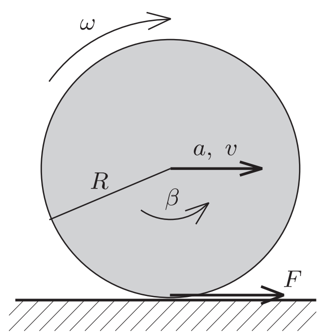
$$ma = F, \tag{1}$$

$$\Theta\beta = FR. \tag{2}$$

A tiszta gördülés feltétele:

$$v = R\omega. \tag{3}$$

Ha x-szel jelöljük azt az utat, amennyit a korong középpontja elmozdul a köszörülés befejeződéséig, akkor



1. ábra

$$x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2. \tag{4}$$

Az (1) és (2) egyenletekből

$$a = \frac{F}{m} = \mu g \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$
$$\beta = \frac{FR}{\Theta} = \frac{FR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2g\mu}{R} \approx 80\frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$

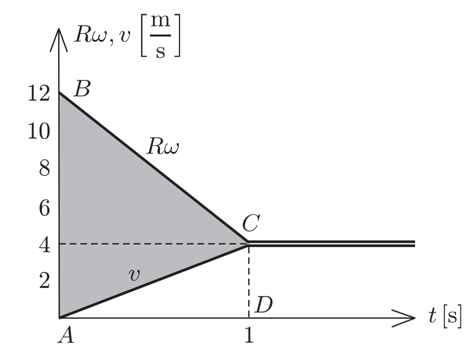
A (3) egyenletetből – az egyenletesen változó mozgás sebességének és szögsebességének időfüggését felírva – kapjuk, hogy $a\Delta t = (\omega_0 - \beta\Delta t)R$, ahonnan (az SI-mértékegységek kiírását „lespórolva")

$$4\Delta t = (120 - 80\Delta t)\cdot 0{,}1, \qquad \Delta t = 1\ \mathrm{s}.$$

Ennyi idő alatt az egyenletesen gyorsuló korong középpontja

$$x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2 = 2\ \mathrm{m}$$

utat tesz meg. A súrlódási erő csak ezen a 2 méteres úton végez munkát a korongon, a további 3 méteren *nem.* A tiszta gördülés során a korong tömegközéppontjának sebessége mindvégig 4 m/s, szögsebessége pedig 40 s^{-1} marad. A korong v tömegközépponti sebességének és az $R\omega$ kerületi sebességének időbeli alakulását szemlélteti a *2. ábra.*



2. ábra

A korongra ható súrlódási erő munkája két részből áll:

$$W = F \cdot x - F \cdot R\Delta\varphi,$$

ahol $\Delta\varphi$ a korong szögelfordulása Δt idő alatt. (A képletben szereplő előjelek azt fejezik ki, hogy a tömegközéppont sebessége a súrlódási erővel megegyező irányú, a forgásból származó kerületi sebesség pedig azzal ellentétes irányú.) A szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 = 120 - \frac{1}{2} \cdot 80 = 80 \text{ radián},$$

a munka tehát:

$$W = \mu mgx - \mu mg\Delta\varphi R = 0{,}4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 - 0{,}4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 0{,}1 = -120 \text{ J}.$$

Ez a munka a 2. ábrán leolvasható elmozdulásokból közvetlenül is megkapható. A korong középpontjának elmozdulása a tiszta gördülés kezdetéig a $v(t)$ függvény grafikonján a görbe alatti terület. Esetünkben ez az ACD háromszög területe: 2 (méter). Ugyanakkor a kerületi pontok forgás miatti elmozdulása az $R\omega(t)$ grafikon görbe alatti területe, ami esetünkben az $ABCD$ trapéz területe, 6 (méter). A két terület különbsége (az ábrán szürkén jelölt ABC háromszög 6 egységnyi területének (-1)-szerese) a korong súrlódó pontjainak a talajhoz viszonyított (relatív) elmozdulása. Ennek az elmozdulásnak és az $F = 20$ N erőnek a szorzata adja meg a súrlódási erő munkavégzését.

Ugyanezt az eredményt a munkatételből is megkaphatjuk. A végzett munka a korong összes mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0{,}1^2\right) \cdot (120 - 80 \cdot 1)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0{,}1^2\right) \cdot 120^2 = -120 \text{ J}.$$