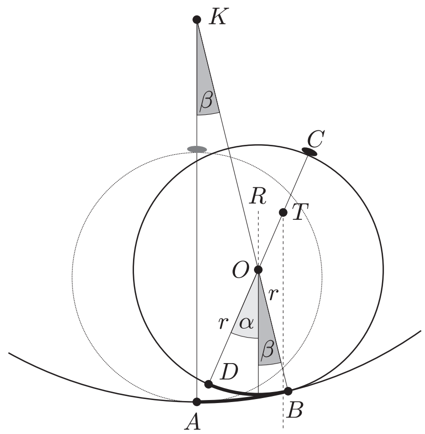
I. megoldás. Mozdítsuk ki (gondolatban) az abroncsot az egyensúlyi állapotából – mondjuk jobbra – egy kicsiny α szöggel jellemezhető szögelfordulással! Ekkor (az *ábra* jelöléseit követve) az abroncs középpontja az O pontba, a nehezék a C pontba, az abroncs+nehezék rendszer tömegközépponja pedig a T pontba kerül. Mivel a nehezék és az abroncs tömege megegyezik, $OT = TC = \frac{r}{2}$.

Az elképzelt elmozdulás során az abroncs és a vályú érintkezési pontja az ábrán jelölt B pontba vándorol; ez a pont a vályú K középpontjából nézve az eredeti A érintkezési ponthoz képest β szöggel elforgatott helyzetű.



A kezdeti egyensúlyi állapot akkor stabil, ha egy kicsit kimozdított állapotban az abroncsra ható forgatónyomaték az eredeti állapotába igyekszik visszatéríteni a rendszert. Ez a feltétel akkor teljesül, ha a kimozdított rendszer tömegközéppontjának függőleges vetülete a B pont bal oldalára esik, vagyis ha

$$\frac{r}{2}\sin\alpha < r\sin\beta, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 2.$$

Mivel α és β kicsiny szögek, a szinuszuk a szögek radiánban mért értékével közelíthető, így a stabil egyensúly feltétele:

$$\frac{\alpha}{\beta} < 2. \tag{1}$$

Tudjuk még azt is, hogy az érdes vályúban az abroncs csúszásmentesen gördül, vagyis az ábrán vastagon jelölt AB és DB ívek hossza megegyezik:

$$R\beta = r\alpha + r\beta, \qquad \text{tehát} \qquad \frac{R}{r} = \frac{\alpha}{\beta} + 1.$$

Innen (1) felhasználásával a stabilitási feltétel:

$$\frac{R}{r} < 3, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{r}{R} > \frac{1}{3}.$$

II. megoldás. Az egyensúlyi helyzet akkor stabil, ha onnan kicsit kimozdítva a rendszert a helyzeti energiája növekszik. Az I. megoldás ábrájának jelöléseit használva a helyzeti energia változása az eredeti állapothoz képest

$$\Delta E = m_{\text{abroncs}}\, g(R-r)(1-\cos\beta) + m_{\text{nehezék}}\, g(R-r)(1-\cos\beta) - \\ - m_{\text{nehezék}}\, gr(1-\cos\alpha).$$

Mivel $m_{\text{abroncs}} = m_{\text{nehezék}} = m$, továbbá a kicsiny szögekre érvényes a $\cos x \approx 1 - x^2/2$ közelítés, az energiaváltozás így írható:

$$\Delta E = mg(R-r)\beta^2 - mg\frac{r}{2}\alpha^2.$$

Innen – a csúszásmentes gördülés $r\alpha = (R-r)\beta$ geometriai feltételét is kihasználva – a stabilitás feltétele:

$$\Delta E = mg(R-r)\beta^2\left[1 - \frac{R-r}{2r}\right] > 0.$$

Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül tetszőleges (kicsiny) β-ra, ha a szögletes zárójelben álló tényező pozitív:

$$1 - \frac{R-r}{2r} > 0, \quad \text{vagyis ha} \quad \frac{r}{R} > \frac{1}{3}.$$