Megoldás. Ha az űreszköz mozgását csak a Nap gravitációs ereje határozza meg, akkor úgy viselkedik, mint egy bolygó, tehát – Kepler törvényeinek megfelelően – ellipszis alakú pályán kering.

Jelöljük az ellipszis fél nagytengelyét a-val, a test tömegét m-mel, a Nap tömegét pedig M-mel. A Függvénytáblázatban (is) megtalálható képlet szerint a test pillanatnyi v sebessége és a Napról mért r távolsága közti összefüggés:

$$v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

A test összenergiája, a mozgási és a gravitációs helyzeti (potenciális) energia összege:

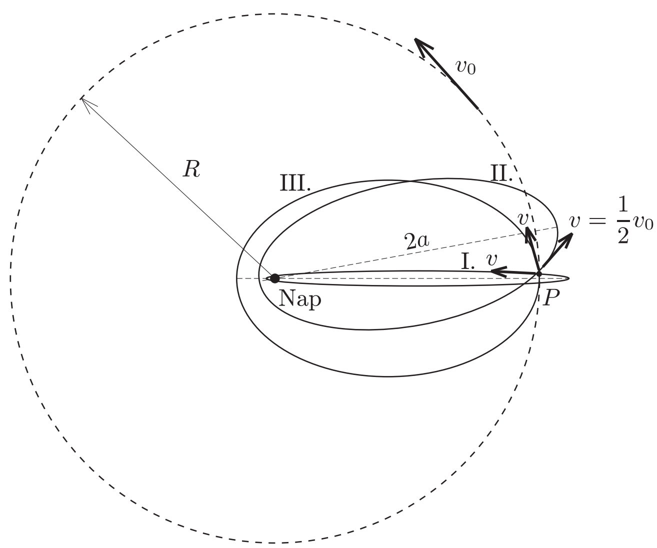
$$E = E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{\gamma Mm}{r}\right),$$

ami (1) felhasználásával így írható:

$$E = \frac{\gamma Mm}{2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{\gamma Mm}{r} = -\frac{\gamma Mm}{2a}.$$

Látható, hogy a test energiája egyértelműen meghatározza az ellipszis fél nagytengelyét, függetlenül az ellipszis kistengelyének vagy az excentricitásának nagyságától.

Mire következtethetünk az összenergia és a fél nagytengely kapcsolatából a jelen feladatban? Akármilyen irányba lőjük is ki az űreszközt egy adott pontból, ha a kezdősebességének nagysága (és ezzel együtt a kezdeti mozgási energiája) megadott értékű, helyzeti energiája is meghatározott, az összenergiája és így a pálya nagytengelyének hossza minden esetben ugyanakkora kell legyen. A kezdősebesség iránya csak az ellipszis állását és az excentricitásának mértékét befolyásolja.



Jelöljük a P kilövési pont és a Nap távolságát az *ábrán* látható módon R-rel, és számítsuk ki az ellipszis fél nagytengelyét R függvényében! Az R sugarú körpályán történő mozgás v_0 sebessége a Newton-féle

$$m\frac{v_0^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2}$$

mozgásegyenlet szerint

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Az űreszköz kezdősebessége a feladat szövege szerint $v = v_0/2$, ahonnan az összenergiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{R} = -\frac{7}{8}\frac{\gamma Mm}{R},$$

vagyis az ellipszispálya fél nagytengelye (2) alapján számolva $a = \frac{4}{7}R$.

Az ábrán különböző irányú (de ugyanakkora nagyságú) kezdősebességhez tartozó ellipszispályákat tüntettünk fel. Mindegyik ellipszisnek ugyanakkora, $2a = \frac{8}{7}R$ hosszúságú a nagytengelye, és az egyik fókuszpontja a Nap helyén van.

a) Mindegyik ellipszis megkerüli a Napot, tehát az űreszköz a kilövési ponttól legalább R távolságra jut. Ha a szondát majdnem pontosan a Nap felé (vagy azzal ellentétes irányban indítjuk, akkor a pályája az I. jelű elfajult ellipszis (határesetben egy egyenes), ezen haladva a szonda legfeljebb R távolságra jut a P ponttól.

b) Az ellipszis két legtávolabbi pontja a nagytengely két vége, tehát abban az esetben kerül legmesszebb az indulási ponttól a test, ha P a nagytengely egyik végpontja. Ezt úgy érhetjük el, hogy a testet Nap irányára merőlegesen lőjük ki (III. jelű pálya). Ekkor az űreszköz $2a = \frac{8}{7}R$ távolságra jut a kilövési ponttól.

c) A második esetben az űreszköz $\frac{8}{7}$-szer messzebbre jut, mint az első esetben.