

Megoldás. a) A sétahajó negyedóra alatt

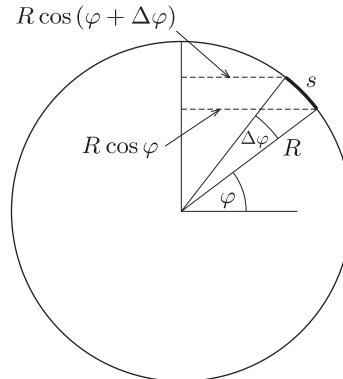
$$s = vt = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{4} = 4,5 \text{ km}$$

utat tesz meg. A hosszúsági körök ívei egyenlő hosszúak, így különbség csak a nyugat-keleti és kelet-nyugati ívek hosszában lesz.

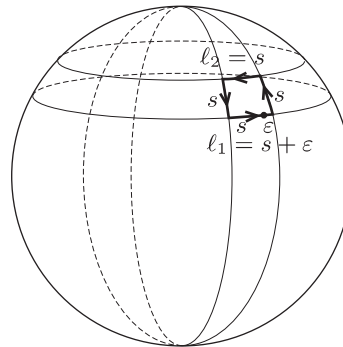
Siófok az északi szélesség $\varphi = 46,91^\circ$ -án található. Egy délkör hossza közelítőleg 40 000 km; a 4,5 km-es észak-dél irányú elmozdulás tehát

$$\Delta\varphi = \frac{4,5}{40\,000} \cdot 360^\circ \approx 0,04^\circ$$

változást jelent a szélességi koordinátában (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Azonos délkörök közötti, de különböző szélességi köríveken történő elmozdulások hosszának aránya (lásd a 2. ábrát):

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{R \cos \varphi}{R \cos(\varphi + \Delta\varphi)} = \frac{\cos 46,91^\circ}{\cos 46,95^\circ} = 1,000\,75.$$

Az északabbra eső kelet-nyugat irányú elmozdulás ívének hossza ismert: $\ell_2 = s = 4,5$ km, ebből kiszámítható, hogy a délebbre eső ív hossza $\ell_1 = 4503,4$ méter lenne. Ha a hajó körbeért volna, éppen ekkora távolságot kellett volna megtennie. Mivel csak 4500 métert tett meg kelet felé, az út végén $\varepsilon = \ell_1 - \ell_2 \approx 3,4$ méternyire került a kiindulási helyétől, *nyugatra*.

Megjegyzés. Az ε távolság összemérhető a sétahajó méreteivel, így a kezdeti és a végső helyzet távolsága csak a hajó valamely kitüntetett, az irányváltoztatás során el nem mozgó pontjára értelmezhető.

b) A Földhöz képes mozgó testek súlyának megváltozását az inerciarendszerhez viszonyított \mathbf{a} gyorsulás megváltozásával magyarázhatjuk. A Newton-féle mozgásegyenlet szerint:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{K} = m\mathbf{a},$$

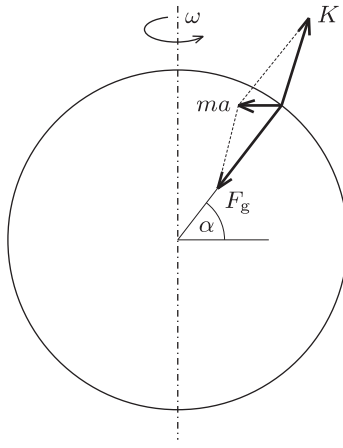
ahol \mathbf{F}_g a testre ható gravitációs erő, \mathbf{K} pedig az alátámasztást biztosító kényszererő (jelen esetben ez a Balaton vízének felhajtóereje).

A test súlya – megállapodás szerint – a kényszererő nagyságával egyenlő:

$$G = |\mathbf{K}| = |\mathbf{F}_g - m\mathbf{a}|,$$

ami egy α szélességi körön kelet felé v sebességgel mozgó, m tömegű test estén így számolható (lásd a 3. ábrát):

$$G = \sqrt{(F_g \sin \alpha)^2 + (F_g \cos \alpha - ma)^2}.$$



3. ábra

A test sebessége inerciarendszerben a Föld forgásából adódó $R\omega \cos \alpha$ kerületi sebesség és v előjeles összege, pályasugara $r = R \cos \alpha$, gyorsulása tehát

$$a = \frac{(R\omega \cos \alpha + v)^2}{r}.$$

Az Egyenlítő hossza kb. $K = 40\,075$ km. Siófok szélességi körének kerülete (ha a Föld alakjának a gömbtől való eltérését nem vesszük figyelembe):

$$K_1 = K \cos 46,91^\circ = 27\,377 \text{ km},$$

az ennek megfelelő sugár pedig

$$r_1 = \frac{K_1}{2\pi} = 4357,2 \text{ km}.$$

Az $T = 24$ h periódusidővel forgó Föld kerületi sebessége ezen a helyen

$$V_1 = \frac{K_1}{T} = \frac{27\,377 \text{ km}}{86\,400 \text{ s}} = 316,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A kelet felé haladó hajó sebessége hozzáadódik a Föld felszínének (ugyancsak kelet felé mutató) sebességéhez, nagysága tehát

$$v_1 = V_1 + v = 316,86 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 321,86 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a test centripetális gyorsulása pedig

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = 0,023\,77 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ezeket az értékeket ($m = 50\,000$ kg és $\alpha = 46,91^\circ$ adatokat is kihasználva) a súlyt megadó képletbe helyettesítve

$$G_1 = 489\,688 \text{ N}$$

adódik.

Ismételjük meg a számolást a Siófoktól északra, attól 5 km távolságban húzódó szélességi kör mentén nyugat felé mozgó, tehát $v = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű hajóra! A szélességi kör kerülete

$$K_2 = K \cos 46,95^\circ = 27\,356 \text{ km},$$

a megfelelő sugár

$$r_2 = \frac{K_2}{2\pi} = 4353,9 \text{ km},$$

a Föld felszínének kerületi sebessége ezen a helyen

$$V_2 = \frac{K_2}{T} = 316,62 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a hajó sebessége (inerciarendszerben, kelet felé)

$$v_2 = 316,62 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 311,62 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

centripetális gyorsulása tehát

$$a_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = 0,022\,30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A hajó súlya ebben az esetben

$$G_2 = 489\,740 \text{ N.}$$

Látható, hogy a kelet felé haladó hajó súlya mintegy 52 N-nal kisebb, mint az ugyanekkora sebességgel nyugati irányban mozgó hajóé.

Megjegyzések. 1. A megoldásban a gravitációs erőt az $F_g = mg$ képlet alapján, a szokásos $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ értékkel számoltuk, jóllehet ez a mennyiség már tartalmazza a Föld forgásából adódó kicsiny korrekciót. Eljárásunk mégis helyes, mert a súlykülönbség számításánál a gravitációs erőnek megfelelő legnagyobb tag kiesik, nem lényeges tehát, ha azt kicsit „pontatlanul” számoljuk.

2. A Föld alakja ténylegesen eltér a gömbtől, emiatt a hajó súlya még akkor is különböző lenne két különböző szélességi kör mentén, ha a sétahajó a vízhez képest nem mozogna. Ez a különbség azonban lényegesen kisebb, mint a feladatban számolt (a hajó mozgásából adódó) érték.

3. *Eötvös Loránd* (1848–1919) magyarázta meg és mutatta ki kísérletileg is, hogy a Földön kelet felé mozgó testek súlya kisebb, mint a nyugat felé mozgóké. Tiszteletére ezt a jelenséget *Eötvös-effektusnak* nevezik.