I. megoldás. *a*) Legyen a félhenger sugara r, és a helyzeti energiát tekintsük a pálya legalsó pontjánánál nullának. A mechanikai energiamegmaradás törvénye szerint az m tömegű test v sebessége a pálya legmélyebb pontján így számolható:

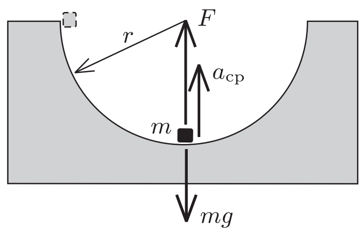
$$mgr = \frac{1}{2}mv^2,$$
$$v^2 = 2gr.$$

A Newton-egyenlet szerint a kis test és a hasáb között ható erő F erő a kérdéses pontban (*1. ábra*):

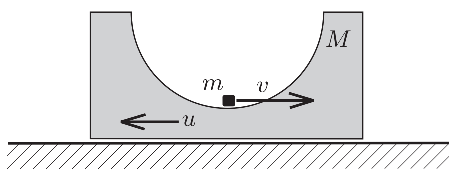
$$F - mg = ma_{\rm cp}, \qquad \text{ahol} \qquad a_{\rm cp} = \frac{v^2}{r},$$

innen

$$F = mg + m\frac{v^2}{r} = mg + 2mg = 3mg.$$



1. ábra



2. ábra

b) Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a hasáb nem rögzített, hanem súrlódásmentesen elcsúszhat a vízszintes felületen! Jelöljük az m tömegű test sebességét a pálya legalján v-vel, a M tömegű hasáb sebességét pedig u-val (*2. ábra*)! (A két test sebessége egymással ellentétes irányú.) Mivel a rendszerre nem hat olyan külső erő, aminek vízszintes komponense nullától különböző lenne, a rendszer összlendületének vízszintes komponense mindvégig, így a vizsgálandó pillanatban is nulla kell legyen:

$$Mu - mv = 0,$$
$$Mu = mv.$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazhatjuk az m és M tömegű testekből álló redszerre:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2,$$
$$2mgr = mv^2 + Mu^2,$$
$$2mgr = mv^2 + muv,$$
$$2gr = uv + v^2.$$

Abban a pillanatban, amikor az m tömegű test a pályája legalsó pontján van, tekinthetjük az M tömegű testet tehetetlenségi (gyorsulásmentes) vonatkoztatási rendszernek.

Megjegyzés. A hasábhoz rögzített koordináta-rendszer *gyorsuló* rendszer, amelyben – eredeti alakjukban – *nem* érvényesek a Newton-törvények. Abban a pillanatban azonban, amikor v és vele együtt u a legnagyobb értékét veszi fel, a koordináta-rendszer gyorsulása éppen nulla, tehát a hasáb vonatkoztatási rendszere inerciarendszernek tekinthető.

Ebből a vonatkoztatási rendszerből nézve a kis test $v_{\rm relatív} = u + v$ sebességgel r sugarú körpályán mozog, centripetális gyorsulása tehát:

$$a_{\rm cp} = \frac{(u+v)^2}{r}.$$

Írjuk fel az m tömegű testre a pálya legmélyebb pontján (ahol a hasábra kifejtett erő F erő a megadott $3{,}5\,mg$ nagyságú) a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$F - mg = ma_{\mathrm{cp}},$$

$$3{,}5\,mg - mg = m\frac{(u+v)^2}{r},$$

$$2{,}5\,g = \frac{(u+v)^2}{r},$$

$$u + v = \sqrt{2{,}5\,rg}.$$

Használjuk fel az energiamegmaradásból kapott eredményt is:

$$\frac{uv+v^2}{u+v} = \frac{2rg}{\sqrt{2{,}5\,rg}},$$

vagyis a kis test sebessége a pálya mélypontján:

$$v = \sqrt{\frac{8}{5}rg}.$$

Ebből a hasáb sebessége is megkapható:

$$u = \sqrt{\frac{5}{2}rg} - v = \sqrt{\frac{5}{2}rg} - \sqrt{\frac{8}{5}rg} = \sqrt{\frac{1}{10}rg},$$

és végül a tömegek aránya is kiszámítható:

$$\frac{m}{M} = \frac{u}{v} = \frac{1}{4}.$$

A hasáb tömege tehát *négyszer* akkora, mint a kis testé.

II. megoldás. Számítsuk ki a két test közötti F nyomóerő nagyságát tetszőleges m/M tömegarányra! Ebből $m \ll M$ határesetben az *a*) kérdésre kapunk választ, a *b*) kérdésnél pedig az $F = 3{,}5\,mg$ adatból a tömegarányt határozhatjuk meg.

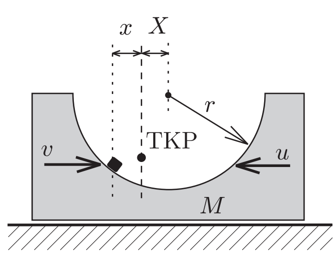
Írjuk le a mozgást az álló, vízszintes felülethez rögzített inerciarendszerből! Vízszintes irányú külső erők hiányában a rendszer tömegközéppontja vízszintesen nem mozdulhat el, fennáll tehát, hogy

$$mx = MX,$$

ahol x a kis test távolsága a tömegközépponton átmenő függőleges egyenestől, X pedig ugyanez a mennyiség a hasábra vonatkoztatva (*3. ábra*). Innen következik, hogy a $v = -\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ és $u = -\dfrac{\Delta X}{\Delta t}$ sebességek aránya is a tömegaránnyal egyenlő:

$$mv = Mu, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{u}{v} = \frac{m}{M}.$$

(Az előjelválasztás az I. megoldásban használt jelöléseknek felel meg.)



3. ábra

A mechanikai energiamegmaradás törvényéből következik, hogy a kis test pályájának legmélyebb helyzetében

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{M}{m}\cdot\frac{u^2}{v^2}\right) = mgr,$$

ahonnan a sebességarányok ismeretében adódik, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) = mgr,$$

vagyis

$$v=\sqrt{2gr}\cdot\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

Vajon milyen pályán mozog a kis test a választott vonatkoztatási rendszerből nézve? Abban a helyzetben, amikor a kis test a tömegközépponttól vízszintes irányban mérve x távolságra van, a henger középpontja $X=\frac{m}{M}x$ messze lesz a tömegközépponton átmenő függőleges egyenestől. Ha ebben a helyzetben a kis test függőleges irányú elmozdulása y, akkor fenn kell álljon a

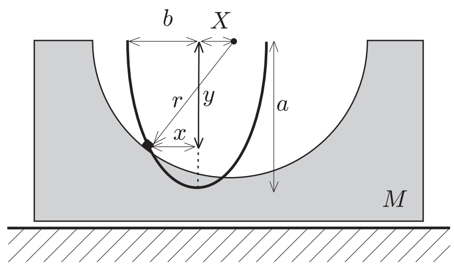
$$(x+X)^2+y^2=r^2$$

kényszerfeltétel (hiszen a kis test rajta kell legyen a félhenger palástján). Innen X-et x-szel kifejezve az

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

összefüggés, vagyis egy ellipszis egyenlete adódik (*4. ábra*), ahol a féltengelyek hossza:

$$a=r \qquad \text{és} \qquad b=\frac{M}{M+m}\,r.$$



4. ábra

A pálya legmélyebb pontjában, vagyis az ellipszis csúcspontjában a pálya görbületi sugara:

$$\varrho=\frac{b^2}{a}=\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 r.$$

Megjegyzés. A görbületi sugár képlete pl. úgy is származtatható, hogy egy tömegpont – amelynek mozgása két, egymásra merőleges irányú harmonikus rezgőmozgásból tevődik össze – gyorsulását kétfeleképpen is kiszámítjuk. Legyen

$$x(t)=a\cos\omega t, \qquad y(t)=b\sin\omega t,$$

ekkor $t=0$ pillanatban a test sebessége $v=b\omega$, gyorsulásának nagysága pedig egyrészt $a\omega^2$, másrészt v^2/ϱ alakban is felírható. Innen az ellipszis görbületi sugara (simulókörének sugara) a nagytengely végpontjaiban:

$$\varrho=\frac{v^2}{a\omega^2}=\frac{b^2}{a}.$$

A Newton-féle mozgásegyenlet felhasználásával kiszámíthatjuk a kis test és a hasáb között ható F erőt a pálya legalsó pontjában:

$$F-mg=m\frac{v^2}{\varrho},$$

azaz

$$F=mg+m\cdot 2gr\,\frac{M}{M+m}\cdot\left(\frac{M+m}{M}\right)^2\,\frac{1}{r}=mg\left(3+2\frac{m}{M}\right).$$

Innen már egyszerűen adódik, hogy ha $m\ll M$, akkor $F=3mg$, és az $F=3{,}5\,mg$ érték $M=4m$ esetén valósul meg.