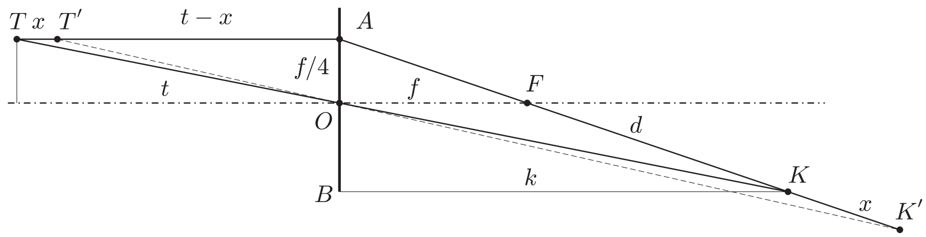
Megoldás. Az *1. ábra* a T pontban levő fényforrás K képének kialakulását mutatja két nevezetes sugármenet segítségével. (A jobb áttekinthetőség kedvéért az ábrát az optikai tengelyre merőleges irányban megnyújtottuk, ez azonban a szerkesztéseket nem rontja el.)



A lencsetörvény szerint

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f},$$

azaz

$$k=\frac{tf}{t-f}. \tag{1}$$

A OAF és BAK háromszögek hasonlósága miatt a BA szakasz hossza $k/4$, és így – Pitagorasz tétele szerint – a K képpont távolsága A-tól:

$$d=AK=\sqrt{k^2+\left(\frac{k}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}k,$$

ami (1) felhasználásával így is írható:

$$d=\frac{\sqrt{17}}{4}\frac{tf}{t-f}. \tag{2}$$

Az optikai tengellyel párhuzamos TA egyenes mentén mozgó tárgy képe az AF egyenesen fog mozogni. Ha a tárgy a mozgása során egy rövid idő alatt T-ből T'-be kerül, a képe ugyanezen időtartam alatt K-ból K'-be érkezik. Ha a fényforrás sebessége és a képének sebessége megegyezik, akkor $TT'=KK'=x$ elmozdulásoknak is meg kell egyeznie. Eszerint a (2) egyenlőségnek úgy is teljesülnie kell, ha t helyébe $t-x$-et, d helyébe pedig $d+x$-et írunk, amennyiben $x\ll t$ és $x\ll d$. Fennáll tehát:

$$d+x=\frac{\sqrt{17}}{4}\frac{(t-x)f}{t-x-f}. \tag{3}$$

Algebrai átalakítások után (2) és (3) így írható:

$$4(td-fd)=\sqrt{17}\,tf, \tag{2'}$$

$$4\big(td+xt-xd-x^2-fd-xf\big)=\sqrt{17}\,(tf-xf). \tag{3'}$$

Képezzük a (2′) és (3′) egyenletek különbségét:

$$4(d+x+f-t)x=\sqrt{17}\,xf,$$

egyszerűsítsünk x-szel, majd hanyagoljuk el t mellett a hozzá képest nagyon kicsiny x-et! Azt kapjuk, hogy

$$f+d-t=\frac{\sqrt{17}}{4}\,f,$$

ami (2) felhasználásával így írható:

$$f-t+\frac{\sqrt{17}}{4}\,\frac{tf}{t-f}=\frac{\sqrt{17}}{4}\,f,$$

$$t-f=\frac{\sqrt{17}}{4}\left(\frac{tf}{t-f}-f\right)=\frac{\sqrt{17}}{4}\,\frac{f^2}{t-f},$$

$$(t-f)^2=\frac{\sqrt{17}}{4}\,f^2,$$

$$t=\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{17}}{2}\right)f. \tag{4}$$

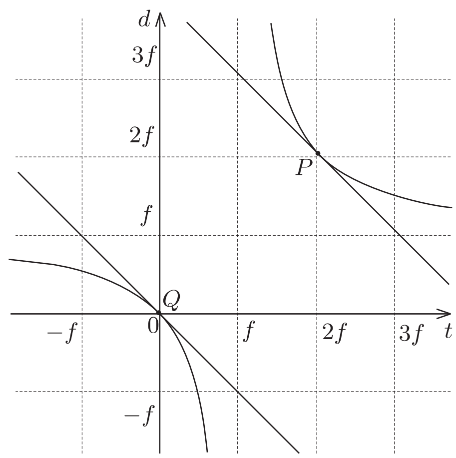
A negatív előjel (4)-ben $t < 0$ tárgytávolságot eredményezne, ez egy valódi fényforrásnál nem lehetséges.

Megjegyzés. A negatív tárgytávolság egy másik leképező eszköz által létrehozott *virtuális tárgyként* értelmezhető, de jelen esetben még ez sem lenne elfogadható, mert olyan közel lenne a lencséhez, hogy a fénysugarak az optikai tengellyel túlságosan nagy szöget zárnának be, emiatt a lencsetörvény egyszerű alakja alkalmazhatatlanná válna.

A feladat feltételének tehát csak a

$$t = \left(1 + \frac{\sqrt[4]{17}}{2}\right) f \approx 2{,}015\, f$$

tárgytávolság felel meg, ebben a helyzetben mozog a tárgy és a kép ugyanakkora sebességgel.



Ez az eredmény a (2) összefüggéssel megadott $d(t)$ függvény grafikus ábrázolásával (*2. ábra*) és a -1 meredekségű érintő megkeresésével, vagy differenciálszámítással, a

$$d'(t) = \frac{\sqrt{17}}{4}\left(\frac{f}{t-f} - \frac{tf}{(t-f)^2}\right) =$$
$$= -\frac{\sqrt{17}}{4}\,\frac{f^2}{(t-f)^2} = -1$$

egyenlet megoldásával is megkapható.