Megoldás. Számítsuk ki, milyen messzire jut el az a vízsugár, amelyik adott H magasra helyzett locsolófejből indul ki, a vízszineshez képest α szögben, v_0 kezdősebességgel. (Az egyik esetben $H=0$, a másik alkalommal $H=h$.)

A ferde hajítást végző, pontszerűnek tekinthető vízcseppek talajra érésének idejét a függőleges mozgásegyenletből számolhatjuk ki: $\frac{g}{2}t^2 - v_0\sin\alpha\cdot t = H$, amely másodfokú egyenletnek pozitív gyöke:

$$t = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH}}{g}.$$

Ennyi idő alatt a vízcseppek vízszintes irányban $v_0\cos\alpha\cdot t$ utat tesznek meg, tehát egy

$$r(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\left[\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gH}{v_0^2}}\right)\right] \tag{1}$$

sugarú körvonal mentén érnek földet. Ez a körsugár a függőlegesen induló vízcseppek megadott $h = \frac{v_0^2}{2g}$ emelkedési magasságával kifejezve így is írható:

$$r(\alpha) = 2h\left[\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{H}{h}}\right)\right].$$

A megöntözött terület nagyságát az $r(\alpha)$ függvény maximuma határozza meg. Ha $r(\alpha)\le R(H)$, akkor az öntözött terület:

$$T(H) = R^2(H)\pi,$$

és a keresett területarány:

$$\frac{T(h)}{T(0)} = \frac{R^2(h)}{R^2(0)}.$$

Az $r(\alpha)$ függvény szélsőértékét az (1)-ben szereplő szögletes zárójeles

$$f(\alpha) = \cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{H}{h}}\right)$$

kifejezés maximuma határozza meg. Ennek megkeresésére többféle módszert alkalmazhatunk.

a) Ábrázolhatjuk (adott H mellett) $f(\alpha)$-t, és a grafikonról leolvashatjuk a szélsőérték helyét és nagyságát.

b) Differenciálszámítással, az $f'(\alpha)=0$ egyenlet megoldásával.

c) Egy elemi (lényegében geometriai) módszerrel, melyről a KöMaL 2004. évi decemberi számának 559. oldalán megjelent cikkben olvashatunk.

d) A *Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség* alkalmazásával. Eszerint $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)$ és az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Jelen esetben ez így alkalmazható:

$$f(\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{H}{h}} \le$$
$$\le \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \frac{H}{h}} = \sqrt{1 + \frac{H}{h}}.$$

Ennek megfelelően $R(h) = 2h\cdot\sqrt{2}$ és $R(0) = 2h$, tehát a területek aránya:

$$\frac{T(h)}{T(0)} = \frac{R^2(H)}{R^2(0)} = 2.$$

A h magasságra emelt szórófejjel tehát éppen *kétszer nagyobb* területet öntözhetünk, mint a főldre helyezettel.

Megjegyzés. Jóllehet a feladat nem kérdezte a legmesszebbre spriccelő vízsugár α_0 indulási szögét, a fentiek alapján ezt is kiszámíthatjuk. Az egyenlőtlenség éles határesetében

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt{\frac{h}{h+H}},$$

ez $H=0$ esetben a közismert $\alpha_0 = 45°$-ot adja, $H=h$ esetben pedig $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35°$. (Néhány versenyző – tévesen – úgy vélte, hogy a megemelt locsolófejből a vízszintesen kirepülő vízcseppek jutnak legtávolabb.)