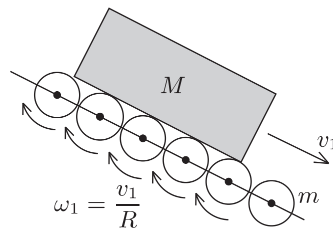
Egy-egy tömör gumihenger tehetetlenségi nyomatéka

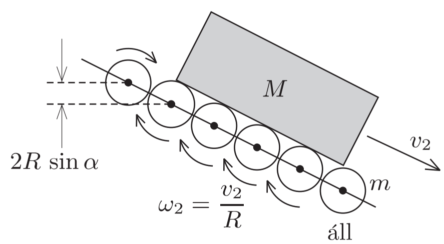
$$\Theta = \frac{1}{2} m R^2 .$$

Feltételezzük, hogy a láda egyszerre $N \gg 1$ számú görgővel érintkezik, s amikor a felső fele legurul az egyik görgőről, éppen akkor érkezik az alsó fele egy újabb gumihengerhez. (A végsebesség szempontjából nem lényeges feltevés, hogy a láda hossza legyen egész számú többszöröse a görgők távolságának; ez csupán a számolást egyszerűsíti.)



1. ábra

Tegyük fel, hogy amikor a lefelé mozgó láda hátsó (felső) éle éppen elhagyja az egyik görgő tetejét, akkor a láda sebessége v_1 (*1. ábra*), amikor pedig majdnem a következő görgőhöz ér, akkor v_2 (*2. ábra*). Ezen két állapot között a láda tömegközéppontja mélyebbre kerül, gravitációs helyzeti energiája tehát lecsökken, a láda és a vele érintkező N darab görgő (az ábrákon $N = 4$) mozgási energiája pedig megnő.



2. ábra

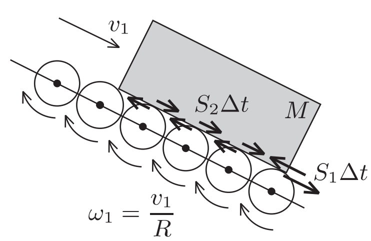
A mozgás ezen szakaszában a láda nem csúszik a görgőkhöz képest, így alkalmazhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét:

$$2MgR\sin\alpha = \frac{1}{2} M \left(v_2^2 - v_1^2\right) +$$

$$+ N \cdot \frac{1}{2} \Theta \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right),$$

ahol (a tiszta gördülés miatt) $\omega_{1,2} = v_{1,2}/R$. A fenti összefüggés Θ ismert alakjának felhasználásával így is írható:

$$4MgR\sin\alpha = \left(M + N\frac{m}{2}\right)(v_2 - v_1)(v_2 + v_1). \tag{1}$$



3. ábra

Amikor a láda rácsúszik a következő, kezdetben még álló gumihengerre, a nagy súrlódás miatt egy rövid ideig nagy erők lépnek fel a láda és a görgők között. Ezen erők hatására a láda sebessége és a vele együtt forgó $N - 1$ darab gumihenger kerületi sebessége lecsökken, az álló gumihenger pedig forogni kezd, kerületi sebessége addig nő, míg el nem éri a láda sebességét. Ha ez a sebesség éppen a korábbi v_1 lesz (*3. ábra*), akkor a folyamat periodikusan ismétlődve folytatódik, tehát ez lesz a láda „állandósult” (pontosabban állandóan v_1 és v_2 között ingadozó) végsebessége.

A görgők és a láda hirtelen (szög)sebességváltozását a súrlódási erők nagy erőlökései okozzák, ezek mellett a nehézségi erő szerepe elhanyagolható. Ha az erőlökéseket a *3. ábrán* látható módon jelöljük, a láda lendületváltozását és a görgők perdületváltozását így írhatjuk le:

$$M(v_2 - v_1) = S_1\Delta t - (N-1)S_2\Delta t,$$

$$RS_1\Delta t = \Theta\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\,\frac{v_1}{R}, \quad RS_2\Delta t = \Theta(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R}\right).$$

Ezekből – az erőlökések kiküszöbölése után – adódik:

$$\frac{1}{2}mv_1 = \left(M + \frac{N-1}{2}m\right)(v_2 - v_1). \tag{2}$$

Ha elosztjuk (1)-et (2)-vel, és kihasználjuk, hogy $v_1 \approx v_2 = v_{\max}$, a láda legnagyobb sebességére a következő kifejezés adódik:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4MgR\sin\alpha}{m}\,\frac{Nm + 2M}{(N-1)m + 2M}},$$

ami $N \gg 1$ esetén így alakul:

$$v_{\max} \approx \sqrt{\frac{4MgR\sin\alpha}{m}}.$$

Megjegyzések. 1. Hibás az a gondolat, miszerint a láda és a gumihengerek között fellépő csúszó súrlódás figyelmen kívül hagyható, és az állandósult sebesség az energiaviszonyokból meghatározható. Ha azt gondoljuk, hogy a láda helyzeti energiájának változása pontosan fedezi a felpörgetett görgők mozgási energiáját, a helyes végsebesség $\sqrt{2}$-szeresét kapjuk. Ténylegesen ezen energiák aránya (egy-egy gumihengernyi elmozdulásnál):

$$\frac{\Delta E_{\text{mozgási}}}{\Delta E_{\text{helyzeti}}} = \frac{\frac{1}{4}mv^2}{2MgR\sin\alpha} = \frac{1}{2},$$

vagyis a láda helyzeti energiájának csak a fele növeli a gumihengerek mozgási (forgási) energiáját, a másik fele súrlódási hővé alakul. Érdekes, hogy ez az $1/2$-es arány független a súrlódási együttható nagyságától.

2. A (2) egyenletből leolvashatjuk, hogy a láda relatív sebességingadozása,

$\dfrac{v_2 - v_1}{v_1}$ valóban kicsi, ha a $M \gg m$ és az $N \gg 1$ feltételek *bármelyike* teljesül.