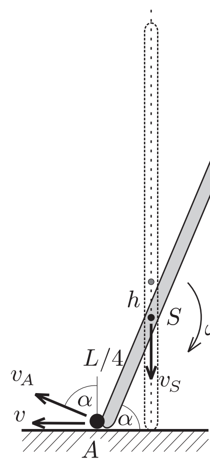
I. megoldás. A pontszerű test addig marad a pálca mellett, amíg az a maximális sebességre gyorsítja fel, ezután elválnak egymástól. Az elválás pillanatáig egyetlen merev testként mozognak, mintha a kis test hozzá lenne ragasztva a pálcához. A rendszer S tömegközéppontja (súlypontja) a pálca aljától $L/4$ távolságban található. Súrlódásmentes mozgásról van szó, vízszintes irányú külső erők nem hatnak, így – a lendületmegmaradás törvényéből adódóan – a tömegközéppont csak függőleges mozgást végezhet, nem lehet vízszintes sebessége.

Számítsuk ki az energiamegmaradás törvényének felhasználásával a pontszerű test v sebességét (vagyis a pálca A pontjához tartozó sebesség vízszintes irányú komponesét) a pálca vízszintessel bezárt α szögének függvényében (*1. ábra*)!



1. ábra

A test + pálca rendszer mozgási energiáját a súlypont körüli ω szögsebességű forgásnak megfelelő energia és a tömegközéppont v_S sebességű mozgásából adódó energia összegeként, a helyzeti energia változását pedig a tömegközéppont h elmozdulásából számolhatjuk:

(1) $$2mgh = \frac{1}{2}2mv_S^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

ahol

(2) $$h = \frac{L}{4}(1 - \sin\alpha)$$

a súlypont magasságának csökkenése, J pedig a test és a pálca rendszerének az S súlypontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka. Ez utóbbit a Steiner-tételt alkalmazva kapjuk meg (először a pálca tehetetlenségi nyomatékát a pálca súlypontjától a közös súlypontba tolva, majd ehhez hozzáadva a test tehetetlenségi nyomatékát a közös súlypontra):

(3) $$J = \left(\frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{16}\right) + m\frac{L^2}{16} = \frac{5}{24}mL^2.$$

Az A pont (S körüli forgásából adódó) kerületi sebessége:

(4) $$v_A = \frac{L}{4}\omega.$$

Ennek függőleges összetevője egyenlő kell legyen v_S-sel, hiszen (az alaplaphoz viszonyítva) az A végpont függőleges sebessége nulla. Eszerint fennáll:

(5) $$v_S = v_A\cos\alpha.$$

Másrészt a pontszerű test sebessége így adható meg:

(6) $$v = v_A\sin\alpha.$$

Az (1)–(6) egyenletekből megkapjuk a pálca szögsebességét:

(7) $$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\sin^2\alpha}},$$

a kis test sebességét az α szög függvényében:

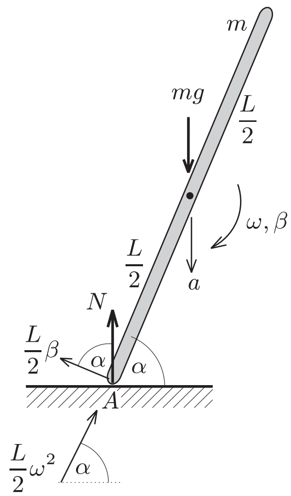
$$v(\alpha)=\sqrt{\frac{gL(1-\sin\alpha)}{\frac{16}{3}-2\sin^2\alpha}}\,\sin\alpha.$$

A függvény deriválásával vagy grafikonjának megrajzolásával megállapítható, hogy maximális értékét az $\alpha=45{,}4^\circ$ esetén éri el, ekkor a maximális sebesség:

$$v_{\max}\approx 0{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

II. megoldás. A feladat differenciálszámítás alkalmazása nélkül is megoldható!

Amikor a kis test sebessége maximális, a gyorsulása nulla, tehát ebben a pillanatban a rúd és a kis test között nem hat erő. Jelöljük a pálcára ható erőket, illetve a pálca szögsebességét és szöggyorsulását a *2. ábrán* látható módon!



2. ábra

Az ábrán (vékonyabb vonallal rajzolt nyilakkal) bejelöltük a pálca tömegközéppontjának gyorsulását, valamint az A pontnak a tömegközépponthoz viszonyított centripetális és tangenciális (érintőleges) gyorsulását is.

A következő mozgásegyenleteket írhatjuk fel. A pálca tömegközéppontjának függőleges mozgására:

$$mg-N=ma, \tag{8}$$

a vízszintes (ebben a pillanatban éppen erőmentes) mozgásra:

$$\frac{L}{2}\omega^2\cos\alpha-\frac{L}{2}\beta\sin\alpha=0, \tag{9}$$

és a pálca forgására:

$$N\,\frac{L}{2}\cos\alpha=\frac{1}{12}mL^2\cdot\beta. \tag{10}$$

Tudjuk még, hogy az A pont nem gyorsulhat függőlegesen, tehát

$$a-\frac{L}{2}\beta\cos\alpha-\frac{L}{2}\omega^2\sin\alpha=0. \tag{11}$$

A (9) összefüggésből

$$\beta=\omega^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

(10)-ből

$$N=\frac{1}{6}\,\frac{mL}{\cos\alpha}\,\beta=\frac{mL\omega^2}{6\sin\alpha},$$

(11)-ből pedig

$$a=\frac{L}{2}\omega^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\right)=\frac{L}{2\sin\alpha}\,\omega^2$$

adódik. Ezeket (8)-ba helyettesítve az

$$\frac{g}{L}=\frac{2\omega^2}{3\sin\alpha}$$

egyenlet kapjuk, amely az I. megoldásban megkapott, az energiamegmaradást kifejező (7) felhasználásával így is írható:

$$3\sin^3\alpha - 24\sin\alpha + 16 = 0.$$

Ennek az $x = \sin\alpha$-ra harmadfokú egyenletnek 0 és 1 közé eső gyöke: $x = 0{,}712$, vagyis $\alpha = 44{,}6^\circ$, és ennek megfelelően a kis test sebessége (ami ugyanolyan nagy, mint a pálca középpontjának vízszintes irányú sebessége):

$$v = \frac{1}{2}\cdot\frac{L\omega}{2}\,\sin\alpha = 0{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés. A tömegközéppont mozgásának ismeretében a Newton-egyenletből – minden α szögre – kiszámíthatjuk és ábrázolhatjuk a pálca és a síklap között ható N nyomóerőt. Ez az erő a mozgás során mindvégig pozitív marad, tehát a pálca *nem* válik el a síklaptól.