Minden egyes darabka ugyanakkora, $\dfrac{R}{\sin\alpha}$ távolságra van a m tömegű testtől, ahol az *ábrán* látható α szögre $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{R}{x}$.

Az egyes gyűrűdarabkák által kifejtett gravitációs vonzóerő nagysága

$$\Delta F=f\frac{m\Delta M\,\sin^2\alpha}{R^2}.$$

Ezen erőknek a gyűrű síkjába eső komponensei (szimmetria-okok miatt) kiegyenlítik egymást, az összegük nulla. A tengely irányú komponensek viszont összeadódnak, és az eredőjük:

$$F=\sum\Delta F\,\cos\alpha=f\frac{m\big(\sum\Delta M\big)\sin^2\alpha\,\cos\alpha}{R^2}=f\frac{mM\sin^2\alpha\,\cos\alpha}{R^2}.$$

Ez az erő ott maximális, ahol a $\sin^2\alpha\,\cos\alpha$ kifejezés a legnagyobb értékű. Számítógéppel (vagy akár egy zsebszámológéppel) számolva könnyen megállapíthatjuk, hogy (hegyesszögekre korlátozódva) a maximum $\alpha_{\rm m}\approx 54{,}7^\circ$-nál található. Ennek megfelelően a gravitációs térerősség a gyűrű síkjától

$$x_{\rm m}=\frac{R}{\operatorname{tg}\alpha_{\rm m}}\approx 0{,}71\,R$$

távolságban lesz maximális nagyságú.

b) A gyűrűből és a m tömegű testből álló rendszer összenergiája (a gravitációs energia és a mozgási energiák összege) a mozgás során állandó marad. A tömegekre megadott feltétel miatt a (kezdetben állónak tekintett) gyűrű gyakorlatilag mozdulatlan marad, mozgási energiája a másik test mozgási energiája mellett elhanyagolható.

Pontszerű, egymástól r távol levő testek gravitációs helyzeti energiáját az

$$E_{\rm g}=-f\frac{m_1m_2}{r}$$

összefüggés alapján számíthatjuk ki. Jelen esetben (mivel a gyűrű minden darabkája ugyanolyan messze van a tengely mentén mozgó kis testtől) a fenti képlet

$$m_1=m,\qquad m_2=M,\qquad r_{\rm kezdeti}=\frac{R}{\sin\alpha_{\rm m}},\qquad r_{\rm végső}=R$$

helyettesítéssel alkalmazható. Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$-f\frac{mM}{R}\,\sin\alpha_{\rm m}=\frac12 mv^2-f\frac{mM}{R},$$

ahonnan a kis test sebessége a gyűrű középpontjánál

$$v=\sqrt{2(1-\sin\alpha_{\rm m})\cdot f\frac{M}{R}}\approx\sqrt{0{,}37\cdot f\frac{M}{R}}\approx 0{,}61\,\sqrt{f\frac{M}{R}}.$$

II. megoldás. *a*) Az I. megoldás jelöléseit követve a gravitációs gyorsulás a gyűrű síkjától x távolságban:

$$g(x)=f\frac{M}{x^2+R^2}\cdot\cos\alpha=fM\cdot\frac{x}{\big(x^2+R^2\big)^{3/2}},$$

ami

$$g(x)=fM\cdot\frac{1}{\Big[x^{\frac43}+R^2\cdot x^{-\frac23}\Big]^{3/2}}$$

alakra is hozható. Ennek a függvénynek ott van maximuma, ahol a szögletes zárójelben álló kifejezésnek minimuma, hiszen a számláló állandó, a $\dfrac32$-ik hatványfüggvény pedig monoton növekvő. A minimum helyét a derivált eltűnéséből kaphatjuk meg:

$$\Big(x^{\frac43}+R^2\cdot x^{-\frac23}\Big)'=\frac43\cdot x^{\frac13}-\frac23R^2\cdot x^{-\frac53}=0,$$

ahonnan (az $x\ge 0$ tartományban)

$$x^2=\frac{R^2}{2},\qquad\text{azaz}\qquad x=\frac{R}{\sqrt2}.$$

(A második derivált a kérdéses helyen pozitív, tehát valóban minimumot találtunk.)

Megjegyzés. A szögletes zárójelben álló kifejezés legkisebb értékét differenciálszámítás nélkül, a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből is megkaphatjuk:

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}+R^2x^{-\frac{2}{3}}}{3}=\frac{x^{\frac{4}{3}}+\frac{R^2}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{R^2}{2}x^{-\frac{2}{3}}}{3}\geq\sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{R^2}{2}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{R^2}{2}x^{-\frac{2}{3}}},$$

és az egyenlőség (a szélsőérték) éppen akkor teljesül, amikor az átlagolt mennyiségek megegyeznek:

$$x^{\frac{4}{3}}=\frac{R^2}{2}x^{-\frac{2}{3}},\qquad\text{tehát}\qquad x=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

(*G. P.*)

b) A mozgás során – külső erők hiányában – az impulzus megmarad. Írjuk le a mozgást abban a koordinátarendszerben, amelyben kezdetben a gyűrű is és a kis test is nyugalomban volt. Ha a m tömegű test sebessége valamely pillanatban v, a gyűrűé pedig (ellentétes irányban) V, akkor az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$mv-MV=0,\qquad\text{azaz}\qquad V=\frac{m}{M}v.$$

A két test együttes mozgási energiája:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\cdot\frac{m^2}{M^2}v^2=\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\approx\frac{1}{2}mv^2.$$

Látható, hogy a $m\ll M$ feltétel miatt a gyűrű mozgási energiája elhanyagolható a kis test mozgási energiája mellett.

Az energiamegmaradás törvénye szerint a kezdeti (nyugalmi) állapotot és a gyűrű középpontján való áthaladás pillanatát összehasonlítva:

$$-f\frac{mM}{\sqrt{\frac{3}{2}}R}=\frac{1}{2}mv^2-f\frac{mM}{R},$$

ahonnan az áthaladás sebességére

$$v=\sqrt{\frac{2fM}{R}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}\approx 0{,}606\sqrt{f\frac{M}{R}}$$

adódik. (Kihasználtuk, hogy az induláskor a gyűrű minden része

$$\sqrt{R^2+x^2}=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}R$$

távolságra volt a m tömegű testtől.)