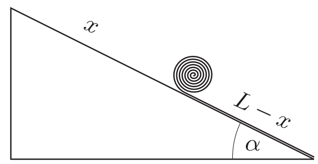
I. megoldás. Jelöljük a lejtő, illetve a szőnyeg hosszát L-lel, a lejtő hajlásszögét α-val, a szőnyeg tömegét M-mel, a tömör henger tömegét pedig m-mel!

Mivel a szőnyeg is és a tömör henger is tisztán, csúszásmentesen gördül, rájuk a nehézségi erő, valamint a lejtő által kifejtett nyomóerő és a tapadási súrlódási erő hat. A nyomóerő és a súrlódási erő munkája zérus, így alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét mind a szőnyeg, mind pedig a tömör henger esetére. Eszerint a gravitációs helyzeti energia és a teljes mozgási energia összege tetszőleges két állapotban, például a kezdőhelyzetben és x út megtétele utáni állapotban ugyanakkora kell legyen.



Foglalkozzunk először a futószőnyeg esetével! Feltételezve, hogy kezdetben csak kis darabon hajtottuk be a szőnyeget, induláskor a helyzeti energiája a lejtő aljához viszonyítva $Mg\dfrac{L}{2}\sin\alpha$, mozgási energiája pedig nulla. Az energiamegmaradást kifejező egyenlet:

$$Mg\frac{L}{2}\sin\alpha = \tag{1}$$
$$= M(x)g(L-x)\sin\alpha + \big[M-M(x)\big]g\frac{L-x}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}M(x)v^2 + \frac{1}{2}\Theta(x)\omega^2,$$

ahol $M(x)$ a hengernek tekinthető guruló szőnyegdarab pillanatnyi tömege, $\Theta(x)$ a pillanatnyi tehetetlenségi nyomatéka, v és ω pedig a guriga tömegközépponti sebessége és szögsebessége. (Megjegyezzük, hogy a szőnyeg vékonysága miatt a guriga sugarát elhanyagoltuk a szőnyeg hossza mellett, és a helyzeti energia számításánál a tömegközéppontot a lejtő síkjában levőnek tekintettük.)

További egyenleteket nyerhetünk, ha felírjuk a guriga tömegét és tehetetlenségi nyomatékát az x elmozdulás függvényében, és kihasználjuk a csúszásmentes gördülés kényszerfeltételét:

$$M(x) = M\,\frac{x}{L}, \tag{2}$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}M(x)\,r^2, \tag{3}$$

$$v = \omega r, \tag{4}$$

ahol r a guriga pillanatnyi sugarát jelöli. Ezekből (3) és (4) felhasználásával a szőnyegguriga teljes mozgási energiája (a transzlációs és a rotációs mozgásokhoz tartozó energiák összege) így írható:

$$\sum E_{\text{mozg.}} = \frac{1}{2}M(x)v^2 + \frac{1}{2}\Theta(x)\omega^2 = \frac{1}{2}M(x)v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M(x)\,r^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}M(x)v^2.$$

Ezt (1)-be írva és (2)-t is kihasználva a szőnyegguriga pillanatnyi sebességére

$$v_{\text{szőnyeg}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,gx\sin\alpha} \tag{$*$}$$

adódik.

Tekintsük most egy R sugarú tömör henger tiszta gördülését a lejtőn! A szőnyegnél leírtakhoz hasonlóan, energetikai megfontolásokkal meghatározhatjuk a henger sebességét is a tömegközéppont x elmozdulásának függvényében. Az energiatétel szerint

$$mgL\sin\alpha = mg\,(L-x)\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\,\omega^2, \quad \text{ahol} \quad \Theta = \frac{1}{2}mR^2,$$

és fennáll a tiszta gördülés

$$v = R\omega$$

feltétele is. Ezekből kapjuk, hogy a tömör henger sebessége x út megtétele után

$$v_{\text{henger}} = \sqrt{\frac{4}{3}\,gx\sin\alpha}. \tag{$**$}$$

a) A (∗) és (∗∗) összefüggésekből jól látszik, hogy bármely x elmozdulásnál a tömör henger sebessége nagyobb, mint a szőnyeg sebessége ugyanezen a helyen, tehát a tömör henger ér le hamarabb a lejtő aljára; a szőnyeg mozgása hosszabb ideig tart, mint a hengeré.

b) Osszuk fel gondolatban a lejtő esésvonalát olyan kicsiny szakaszokra, hogy egy-egy útszakaszon a guriga, illetve a henger sebességét jó közelítéssel állandónak tekinthessük. Mivel a henger sebessége – minden x-nél – $\sqrt{2}$-ször nagyobb, mint a szőnyeg sebessége ugyanezen a helyen, a henger minden egyes kicsiny útszakaszon $\sqrt{2}$-ször rövidebb idő alatt halad végig, mint a szőnyegguriga. Az egyes útszakaszok befutásához szükséges időket összegezve azt is megállapíthatjuk, hogy a szőnyeg a teljes utat $\sqrt{2}$-ször hosszabb idő alatt teszi meg, mint a tömör henger, vagyis

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{2}.$$

II. megoldás. Az energiamegmaradás tételét alkalmazva megkaphatjuk, hogy s hosszúságú elmozdulás után a szőnyeg sebessége

$$v_{\text{szőnyeg}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,gs\sin\alpha},$$

a tömör henger sebessége pedig

$$v_{\text{henger}} = \sqrt{\frac{4}{3}\,gs\sin\alpha}$$

lesz. Mindkét esetben a sebesség a megtett út négyzetgyökével arányos, éppen úgy, mint az egyenletesen gyorsuló mozgásnál, ahol $v=\sqrt{2as}$. A képletek összevetéséből leolvasható, hogy a megfelelő gyorsulások:

$$a_{\text{szőnyeg}} = \frac{1}{3}\,g\sin\alpha, \quad \text{illetve} \quad a_{\text{henger}} = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha = 2\cdot a_{\text{szőnyeg}}.$$

Az egyenletesen gyorsuló mozgás út-idő képlete szerint

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \propto \frac{1}{\sqrt{a}},$$

ugyanakkora utak megtételéhez szükséges idők aránya tehát:

$$\frac{t_{\text{szőnyeg}}}{t_{\text{henger}}} = \sqrt{\frac{a_{\text{henger}}}{a_{\text{szőnyeg}}}} = \sqrt{2}.$$