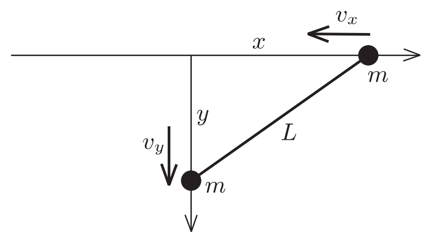
I. megoldás. Az *1. ábrán* látható koordináta-rendszerben minden pillanatban teljesül a fonál nyújthatatlanságát kifejező

(1) $$x^2+y^2=L^2$$

kényszerfeltétel.



1. ábra

Kicsiny Δt idő elteltével is fennáll ugyanez, tehát

(2) $$(x-v_x\Delta t)^2+(y+v_y\Delta t)^2=L^2.$$

(v_x és v_y az egyes testek sebessége az ábrán látható irányítással.) A Δt-ben másodfokú (másodrendűen kicsi) tagokat elhagyva a fenti két egyenletből

(3) $$x\,v_x=y\,v_y$$

adódik.

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést úgy is megkaphatjuk, hogy felírjuk a testek sebességének fonál irányú vetületét, és kihasználjuk, hogy ezek nagysága – a fonál hosszának állandósága miatt – ugyanakkora kell legyen:

$$v_x\cdot\frac{x}{L}=v_y\cdot\frac{y}{L}.$$

Most meghatározzuk a sebességeket az y koordináta függvényében. Szorítkozzunk először a rendszer mozgásának azon részére, amikor $v_x\ge 0$, $v_y\ge 0$ és $x\ge 0$. A munkatételből következik, hogy

$$\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2=mgy.$$

Ebből (1) és (3) felhasználásával

$$v_x^2+v_x^2\frac{x^2}{y^2}=2gy,$$

vagyis

$$v_x=\frac{y}{L}\sqrt{2gy}\qquad\text{és}\qquad v_y=\frac{x}{L}\sqrt{2gy}$$

adódik. Látható, hogy v_x y monoton növekvő függvénye, így maximuma y legnagyobb, $y^{\max}=L$ értékéhez kötődik. Ekkor $v_x^{\max}=\sqrt{2gL}\approx 1{,}41\sqrt{gL}$.

Fejezzük ki v_y-t (1) felhasználásával csak y, vagy a dimenziótlan $u=\dfrac{y}{L}$ függvényeként:

$$v_y=\sqrt{\frac{x^2}{L^2}2gy}=\sqrt{\frac{(L^2-y^2)2gy}{L^2}}=\sqrt{2gL}\,\sqrt{(1-u^2)u}.$$

Ez a sebesség akkor a legnagyobb, amikor az $(1-u^2)u$ kifejezés értéke maximális. Differenciálszámítással, vagy a kifejezés numerikus kiszámításával és grafikus ábrázolással megkaphatjuk, hogy a szélsőérték

$$u=\frac{1}{\sqrt3}\approx 0{,}58;\qquad y=\frac{L}{\sqrt3}$$

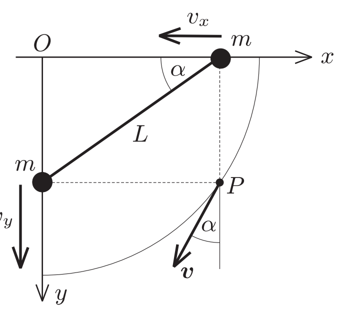
értékhez tartozik, és ekkor

$$v_y^{\max}=\sqrt{\frac{4gL}{3\sqrt3}}\approx 0{,}88\sqrt{gL}.$$

Ekkora sebességekre gyorsulnak fel az egyes testek a nehézségi erő hatására.

A mozgás további szakaszában a vízszintesen mozgó test átlendül az origón, majd fokozatosan lassulva az $x=-L$ helyzetben egy pillanatra megáll; ezután a mozgása folytatódik „visszafelé”. Mivel a testek sebességének nagysága egyértelműen meghatározható a helyzetük függvényében, így a mozgás periodikusan ismétlődő (anharmonikus) rezgőmozgás. A vízszintesen mozgó test periódusideje kétszer nagyobb, mint a függőlegesen mozgó testé.

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a *2. ábrán* látható P pont a mozgás során mindvégig L távolságra van az O origótól, ezért egy L sugarú köríven mozog.



2. ábra

E pont $\boldsymbol{v}$ sebességének x irányú komponense (ha az előjelét „balra” tekintjük pozitívnak) a felső test mindenkori v_x sebességével, y irányú komponense pedig az alsó test v_y sebességével egyezik meg. A mechanikai energia megmaradását kifejező

$$mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$$

egyenlet ezért átírható

$$mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{4}$$

alakba, amely azt fejezi ki, hogy a P pont éppen úgy mozog, ahogy egy L hosszúságú, vízszintesen kitérített fonálinga mozog a nehézségi erő hatására.

A feladatnak arra a kérdésére, hogy hogyan mozognak a testek már most válaszolhatunk: a felső test úgy mozog, ahogy ennek az ingának a földön keletkező árnyéka mozog függőlegesen lefelé irányuló megvilágítás esetén; az alsó test pedig úgy, ahogy az oldalról megvilágított inga árnyéka mozog egy függőleges falon. Ebből következik, hogy a felső test sebessége akkor lesz legnagyobb, amikor éppen áthalad az origón, ekkor ugyanis $\boldsymbol{v}$ nagysága maximális, iránya pedig vízszintes. A (4) egyenletből leolvasható, hogy ez a sebesség

$$v_x^{\max} = \sqrt{2gL}.$$

Az alsó test sebessége előbb növekszik, majd csökken. A v_y sebesség legnagyobb értékét akkor éri el, amikor az inga gyorsulásának függőleges komponense nullává válik. Ez a gyorsuláskomponens az inga érintő irányú (tangenciális) a_t és fonál irányú (centripetális) a_cp gyorsulásának megfelelő vetületeiből számítható ki:

$$a_\mathrm{t}\cos\alpha - a_\mathrm{cp}\sin\alpha = 0. \tag{5}$$

Az inga érintő irányú gyorsulásának nagysága egy α szöggel jellemezhető helyzetben (a mozgásegyenlet szerint)

$$a_\mathrm{t} = g\cos\alpha,$$

a centripetális gyorsulása pedig (az energiamegmaradás tételéből számíthatóan)

$$a_\mathrm{cp} = \frac{v^2}{L} = 2g\sin\alpha.$$

Ezeket (5)-be helyettesítve kapjuk, hogy az alsó test azon $\alpha = \alpha^*$ szöggel jellemzett helyzetben mozog leggyorsabban, amikor $g\cos^2\alpha^* - 2g\sin^2\alpha^* = 0$ teljesül, vagyis

$$\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2}/2 = 35{,}26^\circ.$$

Az alsó test sebessége ebben a helyzetben:

$$v_y^{\max} = v\cos\alpha^* = \sqrt{2gL\sin\alpha^*}\cos\alpha^* \approx 0{,}88\sqrt{gL}.$$