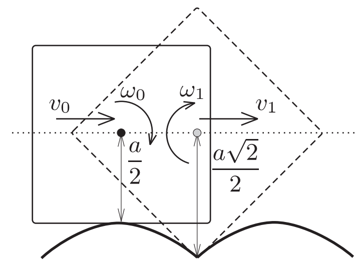
Megoldás. Mivel a kocka tömegközéppontja vízszintesen mozog, ezért a test helyzeti energiája a mozgás során nem változik. A csúszásmentesen gördülő test összes mechanikai energiája időben állandó, tehát a mozgási energiája is állandó kell maradjon.



A mozgási energia két tag összegeként számítható. A kocka minden pontja halad a tömegközéppont (a továbbiakban TK) sebességével, illetve forog a TK körül. Ha a pálya „tetőpontján” v_0 a tömegközéppont sebessége és ω_0 a kocka szögsebessége, a „mélyponton” pedig v_1 és ω_1 a sebesség, illetve szögsebesség, akkor a mozgási energia állandóságát kifejező egyenlet:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2, \tag{1}$$

ahol Θ a test (tömegközéppontra vonatkoztatott) ismert tehetetlenségi nyomatéka.

A kockának a pályával érintkező pontja nulla sebességű. Ez a kényszerfeltétel összefüggést ad a TK pillanatnyi sebessége és a pillanatnyi szögsebesség között. A „tetőponton”

$$v_0 - \frac{a}{2}\omega_0 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \omega_0 = \frac{2v_0}{a},$$

a „mélypontnál” pedig

$$v_1 - \frac{a\sqrt{2}}{2}\omega_1 = 0, \qquad \text{tehát} \qquad \omega_1 = \frac{\sqrt{2}v_1}{a}.$$

Ezeket (és Θ megadott értékét) (1)-be helyettesítve:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}ma^2\cdot\frac{4v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}ma^2\cdot\frac{2v_1^2}{a^2},$$

vagyis

$$v_0^2\left(1+\frac{2}{3}\right) = v_1^2\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

adódik. Innen a tömegközéppont keresett sebessége a „mélypontnál”:

$$v_1 = \sqrt{\frac{5}{4}}\cdot v_0.$$

Megjegyzés. Érdekes, hogy a tömegközéppont vízszintes irányú sebességének nagysága a mozgás során változik, jóllehet a nehézségi erőnek nincs vízszintes komponense. A test vízszintes irányú gyorsulását (vagy lassulását) a pályával érintkező pontnál fellépő nyomóerő és súrlódási erő vízszintes komponense okozza.