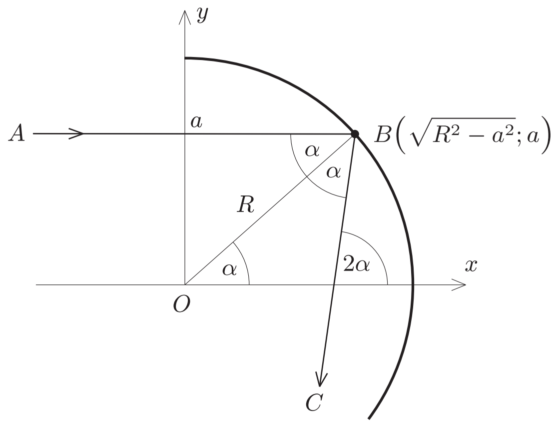
I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot koordinátageometria alkalmazásával! Vegyünk fel egy koordináta-rendszert az *1. ábrán* látható módon, s vizsgáljuk az x tengelytől a távolságban haladó AB fénysugár útját! Ez a sugár az R sugarú hengertükröt a $B\left(\sqrt{R^2-a^2};a\right)$ pontban éri el. A fénysugár a beesési merőlegessel

$$\alpha = \operatorname{arctg} m_{OB}$$

szöget zár be, ahol

$$m_{OB} = \frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}$$

az OB egyenes meredeksége.



1. ábra

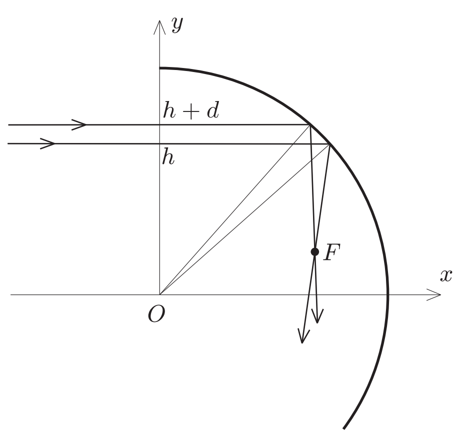
A tükörről visszavert BC sugár az OB egyenessel α, a beeső fénysugárral pedig 2α szöget zár be, a meredeksége tehát

$$m_{BC} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2m_{OB}}{1-m_{OB}^2} = \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2-2a^2}.$$

Ezt felhasználva felírhatjuk az ezüstözött felület B pontjáról visszaverődő fénysugár egyenletét:

(1)
$$y = \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2-2a^2}\left(x-\sqrt{R^2-a^2}\right)+a.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg az x tengelytől $a=h$ és $a=h+d$ távolságban ($d \ll h$) haladó fénysugarak útját a tükröző felületről történő visszaverődésük után. Ha ezen sugarak metszéspontja d-től függetlenül mindig (pontosan, vagy legalább jó közelítéssel) ugyanazon F pontra esik, akkor mondhatjuk, hogy a keskeny fénynyaláb fókuszálódik az F pontban (*2. ábra*).



2. ábra

A két fénysugár egyenletét (1)-ből kaphatjuk $a=h=4$, illetve $a=4+d$ és $R=6$ helyettesítéssel. (A távolságokat a továbbiakban cm-ben mérjük és a mértékegységet nem írjuk ki.) Az egyik sugár egyenlete:

(2)
$$y = 4\sqrt{5}x - 36,$$

a másiké pedig

$$(3)\qquad y=\frac{2(4+d)\sqrt{36-(4+d)^2}}{36-2(4+d)^2}\left(x-\sqrt{36-(4+d)^2}\right)+(4+d).$$

Használjuk ki, hogy $d \ll 1$, és hanyagoljuk el d^2-t és d magasabb hatványait d mellett! Ebben a közelítésben – az 1-hez közeli számok tetszőleges (akár tört-, vagy negatív kitevős) hatványára vonatkozó $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ képletet is felhasználva – kapjuk, hogy (3) így is írható:

$$(4)\qquad y=(1+4d)(4+d)\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{5}d\right)\left[x-\sqrt{20}\left(1-\frac{1}{5}d\right)\right]+d+4.$$

(2) és (4) jobb oldalát egyenlővé téve és az egyenletet x-re megoldva (d négyzetét és magasabb hatványait ismét elhanyagolva)

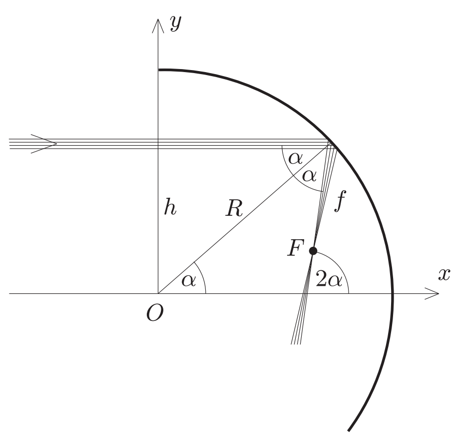
$$x=\frac{17}{9}\sqrt{5}+0\cdot d\approx 4{,}22,\qquad \text{illetve}\qquad y=\frac{16}{9}\approx 1{,}78$$

adódik. Ez az eredmény – az adott közelítésben – *független d-től,* tehát a nyaláb valóban fókuszálódik az $F\left(\frac{17\sqrt{5}}{9};\frac{16}{9}\right)$ pontban. (Hengertükörnél a fókuszálás csak az ábra síkjában történik, a henger szimmetriatengelyével párhuzamos irányban *nem,* emiatt F a térben egy vonalat határoz meg.)

II. megoldás. Belátható, hogy egy R görbületi sugarú tükröző felületre α szög alatt eső fénysugaraknál a leképezési törvény

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{2}{R\cos\alpha}$$

alakban teljesül[1]. A párhuzamosan („végtelen" távolról) érkező sugarakra $\frac{1}{t}\to 0$, ilyenkor $k=f=\frac{R\cos\alpha}{2}$.



3. ábra

Jelen esetben (lásd a *3. ábrát*) $h=4$ és $R=6$ (cm-ben mért) adatok mellett

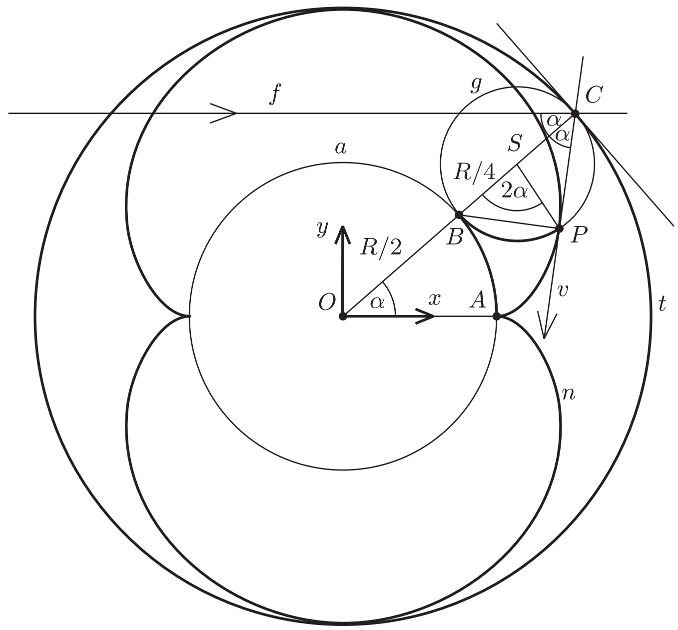
$$\sin\alpha=\frac{h}{R}=\frac{4}{6},\qquad \alpha=41{,}8^\circ,\qquad f=2{,}23.$$

Az F fókuszpont koordinátái tehát:

$$x_F=R\cos\alpha-f\cos 2\alpha=4{,}22\qquad \text{és}\qquad y_F=h-f\sin 2\alpha=1{,}78.$$

III. megoldás. Tekintsük a *4. ábrán* látható *nefroid* („vesegörbe") nevű n görbét, amelyet egy bizonyos (mondjuk $R/2$) sugarú kör külső felén csúszásmentesen gördülő, fele akkora sugarú (esetünkben $R/4$ sugarú) másik kör valamely P pontja ír le (*4. ábra*). (Ez a görbe egy olyan *epiciklois,* amelynél az a alapkör sugarának éppen fele a g gördülőkör sugara.) Belátjuk, hogy a párhuzamosan érkező, majd az R sugarú hengertükörről visszaverődő fénysugarak a nefroid érintői.

[1]Lásd pl. Kós Géza: Lehet egy közelítéssel kevesebb c. cikkét a KöMaL 2010. évi 3. számában, 177. old.



4. ábra

Ha az f fénysugár a C pontban α beesési szöggel éri el a t tükröt, onnan ugyanakkora szöggel verődik vissza; v és f szöge tehát 2α. Másrészt igaz, hogy a csúszásmentes gördülés miatt az alapkör AB ívének hossza megegyezik a gördülőkör BP ívének hosszával, a hozzájuk tartozó középponti szögek aránya pedig a körök sugár-aránya miatt $1:2$, így $BSP\sphericalangle = 2\alpha$ és $BCP\sphericalangle = \alpha$. Ezek szerint a visszavert fénysugár át kell haladjon a nefroid P pontján, méghozzá úgy, hogy éppen érinti a „vesegörbét", hiszen gördülő kör pillanatnyi forgási középpontja B, tehát a P pont sebessége (az érintő iránya) merőleges BP-re, vagyis az érintő PC irányú kell legyen.

Egy keskeny fénynyaláb párhuzamos, egymáshoz közeli fénysugarai a nefroidot egymáshoz közeli pontokban érintik, tehát – jó közelítéssel – egy ponton mennek keresztül, *fókuszálódnak.* A fókuszpont a C tükröződési ponttól

$$f = CP = CB \cdot \cos\alpha = \frac{R}{2} \cdot \cos\alpha$$

távolságban lesz. Az ábráról leolvasható a nefroid paraméteres egyenlete:

$$x(\alpha) = \frac{R}{4}\left(3\cos\alpha - \cos 3\alpha\right), \qquad y(\alpha) = \frac{R}{4}\left(3\sin\alpha - \sin 3\alpha\right),$$

a feladatban szereplő $\alpha = 41{,}8^\circ$ esetén $x = 4{,}22$ cm és $y = 1{,}17$ cm.