I. megoldás. Legyen a rudak hossza rendre ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3. A rudak páronkénti merőlegessége miatt az alátámasztási pontok távolsága a Pitagorasz-tétel szerint:

$$a = \sqrt{\ell_2^2 + \ell_3^2}, \qquad b = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2}, \qquad \text{és} \qquad c = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2}.$$

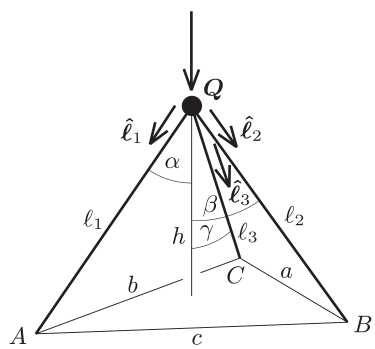
A test $\boldsymbol{Q}$ súlya rudakon úgy oszlik meg, hogy a rudakban ható (rúdirányú) erők vektori összege éppen $\boldsymbol{Q}$-t adja vissza. Az *ábrán* látható jelölésekkel ez az erőfelbontás:

$$\boldsymbol{Q} = {}_1 \cdot Q\cos\alpha + {}_2 \cdot Q\cos\beta + {}_3 \cdot Q\cos\gamma,$$

ahol ${}_1$, ${}_2$ és ${}_3$ a rudak irányába mutató *egységvektorok.* A rudak által alkotott tetraéder h magasságával kifejezve az erőfelbontás így is írható:

$$\boldsymbol{Q} = {}_1 \cdot Q\frac{h}{\ell_1} + {}_2 \cdot Q\frac{h}{\ell_2} + {}_3 \cdot Q\frac{h}{\ell_3}\,.$$

Ebben a képletben az egységvektorok együtthatói éppen a kérdéses rúderők nagyságával egyeznek meg; megadásukhoz a h magasságot kell még kiszámítanunk.



Írjuk fel a tetraéder V térfogatát kétféle módon! Egyrészt az ℓ_1 és ℓ_2 hosszúságú rudak alkotta derékszögű háromszög területe $\frac{1}{2}\ell_2\ell_2$, így az ℓ_3 magasságú tetraéder térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\ell_1\ell_2 \cdot \ell_3 = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{6}\,.$$

Másrészt a térfogat kifejezhető az ABC háromszög T területével és a h magassággal is:

$$V = \frac{1}{3}Th.$$

A két alak összevetéséből

$$h = \frac{3V}{T} = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{2T}\,.$$

Az ABC háromszög T területe az oldalélek hosszának ismeretében a Heron-képletből számítható ki:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Az oldaléleket a rudak hosszával kifejezve (algebrai átalakítások után) a terület így írható:

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}\,,$$

a kérdéses magasság pedig

$$h = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}}\,.$$

A rudakban ható erők tehát:

$$F_1 = \frac{h}{\ell_1}\,Q = \frac{\ell_2\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}}\,Q = \frac{\frac{1}{\ell_1}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2}}}\,Q,$$

$$F_2 = \frac{h}{\ell_2}\,Q = \frac{\ell_1\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}}\,Q = \frac{\frac{1}{\ell_2}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2}}}\,Q,$$

és

$$F_3=\frac{h}{\ell_3}\,Q=\frac{\ell_1\ell_2}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2+\ell_2^2\ell_3^2+\ell_3^2\ell_1^2}}\,Q=\frac{\frac{1}{\ell_3}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2}+\frac{1}{\ell_2^2}+\frac{1}{\ell_3^2}}}\,Q.$$

Egyenlő hosszúságú rudak esetén

$$F_1=F_2=F_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\,Q.$$

II. megoldás. Egy-egy rúdban ébredő erő iránya rúdirányú kell legyen (ellenkező esetben az elhanyagolható súlyú és csuklós végpontú rúd elfordulna). A három rúd által a Q súlyú testre kifejtett erők eredőjének nagysága Q, iránya pedig a súlyerővel ellentétes kell legyen.

Tekintsük az általános, a, b és c hosszúságú rúd esetét! Jelöljük az a hosszúságú rúd függőlegessel bezárt szögét α-val, a másik két rúd és a függőleges szögét β-val és γ-val! A keresett rúderők nagysága:

$$Q_a=Q\cos\alpha,\qquad Q_b=Q\cos\beta,\qquad Q_c=Q\cos\gamma.$$

A három (páronként derékszögű) rúdhoz koordináta-rendszert illeszthetünk. Az alátámasztás síkja $x=a$, $y=b$ és $z=c$ pontokban metszi a tengelyeket, a sík tengelymetszetes alakú egyenlete tehát

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Emellett fölírható a sík alaktényezős egyenlete is: $Ax+By+Cz+D=0$, ahol

$$A=\frac{1}{a}\,,\qquad B=\frac{1}{b}\qquad\text{és}\qquad C=\frac{1}{c}\,,$$

továbbá $D=-1$. Az $\boldsymbol{A}=(A,B,C)$ vektor, és a belőle képezhető

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

egységvektor merőleges az alátámasztás vízszintes síkjára, tehát függőleges irányú.

A függőleges egyenes és a koordinátatengelyek (vagyis a rudak) által bezárt szögek koszinuszai éppen az $\boldsymbol{n}$ vektor komponensei, vagyis

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,,$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,,$$

és

$$\cos\gamma=\frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,.$$

a rudakra ható erők pedig:

$$Q_a=Q\cos\alpha=Q\,\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,,$$

$$Q_b=Q\cos\beta=Q\,\frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,,$$

$$Q_c=Q\cos\gamma=Q\,\frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\,.$$

Abban az esetben, ha $a=b=c$, azaz a rudak egyenlő hosszúak,

$$Q_a=Q_b=Q_c=\frac{Q}{\sqrt{3}}\,.$$