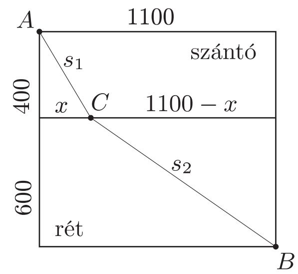
I. megoldás. Legyen x az a távolság, amit a traktor az 1100 méteres oldallal párhuzamos irányban megtesz a szántón, mialatt a két terület határvonalának C pontjához ér (*1. ábra*). Az A pontból akkor jut a legrövidebb idő alatt C-be, ha a legrövidebb úton, vagyis egyenesen halad, hiszen a sebessége itt állandó. Hasonlóan C és B között is az egyenes út biztosítja a legrövidebb időt.



1. ábra

A megtett utak (minden távolságot m egységben mérve):

$$s_1=\sqrt{x^2+400^2} \quad \text{és} \quad s_2=\sqrt{(1100-x)^2+600^2},$$

a teljes út megtételéhez szükséges idő pedig

$$t=\frac{s_1}{v_{\text{szántó}}}+\frac{s_2}{v_{\text{rét}}}\,,$$

ami a sebességek arányának ismert értékét felhasználva

$$t=\frac{4s_1+3s_2}{3v_{\text{rét}}}$$

alakba is írható. Ez az idő akkor minimális, ha a számlálója, vagyis

$$f(x)=4\sqrt{x^2+400^2}+3\sqrt{(1100-x)^2+600^2}$$

minimális.

A minimumot numerikusan (a függvény elegendően sűrű, pontonkénti kiszámításával), vagy számítógépes grafikus ábrázolással, esetleg x szerinti deriválással kaphatjuk meg. (A derivált eltűnésének feltétele negyedfokú egyenletre vezet, ennek megoldása is numerikus eljárást igényel.)

Megjegyzés. A feladat felfogható optikai problémaként is. A Fermat-elv szerint a fény – geometriai optikai leírásban – olyan útvonalon halad, amely az adott kezdő- és végpont között a legrövidebb terjedési időnek felel meg. A feladatban megadott sebességarány az optikai problémában a két közeg relatív törésmutatóját határozza meg. A fénysugár útja – és ebből az eredeti probléma megoldása – az ismert törési törvényből kapható meg, méghozzá a deriválás elkerülésével.

II. megoldás. Nyilvánvaló, hogy a szántón is és a réten is egyenes vonalon érdemes haladni. A keresett útvonal emiatt egy töröttvonal, amely a szántó és a rét határvonalán törik meg. Ezt a töréspontot keressük meg.

Gondolatban rögzítsünk egy erős rudat a szántó és a rét határán. Helyezzünk a rúdra egy súrlódásmentesen csúszó gyűrűt, és kössünk két kötelet is a gyűrűhöz. A kötelek másik végére erősítsünk egy m és egy $0{,}75\,m$ tömegű testet. Az A és B pontoknál ássunk egy-egy (elegendően mély) gödröt. A nehezebb testet engedjük (egy ideális állócsiga segítségével) az A pontnál levő gödörbe, a könnyebbet pedig a B pontnál levő gödörbe. Megmutatjuk, hogy a rendszer egyensúlyi helyzetében a kötél vonala megegyezik a traktor számára optimális (legrövidebb idejű) útvonallal.

A rendszer akkor van statikus egyensúlyban, ha a helyzeti energiája a lehető legkisebb. Itt a két test gravitációs potenciális energiája a rendszer helyzeti energiája, ezt kell minimalizálni. Ha a kötelek hossza ℓ, a szántó felett húzódó kötélszakasz hossza s_1, a rét fölöttié pedig s_2, a helyzeti energia:

$$-\,mg(\ell-s_1)-0{,}75\,mg(\ell-s_2)=-1{,}75mg\ell+mgs_1+0,75mgs_2.$$

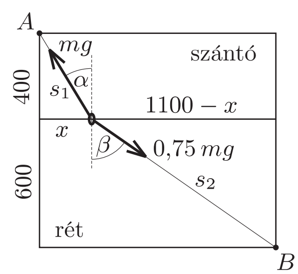
Ez akkor minimális, ha $s_1+0,75\,s_2$ is az. Ez pedig akkor, ha $\dfrac{1}{v_{\text{szántó}}}$-szorosa:

$$\frac{s_1}{v_{\text{szántó}}}+\frac{s_2}{\frac{4}{3}v_{\text{szántó}}}=\frac{s_1}{v_{\text{szántó}}}+\frac{s_2}{v_{\text{rét}}}$$

is minimális. Könnyen látható, hogy a fenti kifejezés éppen a traktor mozgásának ideje. Ha tehát a kötél a traktor számára optimális útvonalon helyezkedik el, a rendszer potenciális energiája minimális, vagyis a rendszer nyugalomban marad.

Egyensúlyi állapotban a gyűrűre nem hat rúd irányú erő, ettől ugyanis elmozdulna. A kötelekben ébredő erő mg és $0{,}75mg$. Ezeknek rúd irányú komponensei kiegyenlítik egymást, nagyságuk egyenlő kell legyen. Legyen az A pontból induló kötélnek a rúdra állított merőlegessel bezárt szöge α, a B-ből indulóé pedig β (*2. ábra*). Az egyes kötelek által kifejtett rúd irányú erő: $mg\sin\alpha$ és $0{,}75\,mg\sin\beta$. Egyensúly esetén ezek egyenlők, amiből

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 0{,}75.$$



2. ábra

Ilyen tulajdonságú pont csak egy van (hiszen a gyűrűt valamelyik irányban mozgatva az egyik kötélerő rúd irányú komponense monoton csökken, a másiké pedig monoton nő). Találgatással, vagy módszeres kereséssel megkapható, hogy amikor a gyűrű a rúd A-hoz közelebbi végétől 300 méterre helyezkedik el,

$$\sin\alpha = \frac{300}{\sqrt{300^2+400^2}} = \frac{300}{500} = 0{,}6 \quad \text{és} \quad \sin\beta = \frac{800}{\sqrt{600^2+800^2}} = \frac{800}{1000} = 0{,}8,$$

ebben a helyzetben tehát valóban teljesül az egyensúlyi feltétel.

Az optimális útvonal ezek szerint a következő: a traktor egyenesen kell haladjon az A pontból a szántó és a rét határvonalára, annak A-hoz közelebbi végétől 300 méterre levő pontjába. Innen menjen egyenesen a B pontba. Ez a leggyorsabban megtehető út.