

Megoldás. Egy gumiszál (a végeinél fogva) nem lehet a feszítetlen hosszánál rövidebbre összenyomni, mivel összenyomása során elhajlik. Emiatt a feladatban szereplő szál jobb oldali, eredetileg b hosszúságú része csak addig fejt ki erőt, amíg a C pont elmozdulása el nem éri a szál feszítetlen hosszának megfelelő értékét. Az, hogy ez a helyzet mikor következik be, függ a szál kezdeti feszítettségétől; erről azonban a feladat szövege nem tartalmaz információt. Emiatt csak két szélsőséges esetre vizsgáltam a feladatot.

I. határeset. Tételezzük fel, hogy a két fal között „kifeszített” gumiszál éppen csak feszes, tehát a jobb oldali része a C pont legkisebb elmozdulására meglazul. Ilyen esetben csak az a hosszúságú gumidarabbal kell foglalkoznunk, a másik rész nem játszik szerepet.

a) Egy rugalmas szál „rugóállandója” fordítottan arányos a szál hosszával (hiszen egy rövidebb szál ugyanakkora erő hatására arányosan kevesebbet nyúlik meg, mint a hosszabb párja). Ennek megfelelően az a hosszúságú száldarab egy

$$D^* = \frac{a+b}{a} \cdot D = \frac{5}{4} D = 1,25 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

rugóállandójú rugóval helyettesíthető, és ez F rugóerő hatására

$$\Delta \ell = \frac{F}{D^*} = 4 \text{ cm}$$

értékkel nyúlik meg.

b) Hasson az F erő a szál azon C' pontjánál, amely a falaktól a' , illetve b' távolságra van. Minél nagyobb a' , annál kisebb a bal oldali száldarabnak megfelelő rugóállandó. A megnyúlás (adott nagyságú erő hatására) akkor lesz a legnagyobb, amikor

$$D^* = \frac{a'+b'}{a'} \cdot D = \frac{50 \text{ cm}}{a'} \cdot 1 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = \frac{50 \text{ N}}{a'}$$

rugóállandó a legkisebb, vagyis amikor a' a lehető legnagyobb. Vegyük figyelembe még azt is, hogy két fal közé tettük a gumiszálát, emiatt a bal oldali részének megnyúlása legfeljebb a C' pont és a jobb oldali fal távolsága, azaz b' lehet. Határesetben

$$F = D^* b',$$

vagyis

$$5 \text{ N} = \frac{50 \text{ N}}{a'} b', \quad \text{tehát} \quad a' = 10 b'.$$

Innen kapjuk (kihasználva, hogy $a' + b' = 50 \text{ cm}$):

$$a' = \frac{10}{11} \cdot 50 \text{ cm} \approx 45,5 \text{ cm} \quad \text{és} \quad b' = \frac{1}{11} \cdot 50 \text{ cm} \approx 4,5 \text{ cm}.$$

A C' pont legnagyobb elmozdulása tehát 4,5 cm lehet.

II. határeset. Ha a gumiszál annyira feszes, hogy a jobb oldali része a C pont elmozdulása után sem lazul meg, akkor a gumiszál két része egy-egy „húzó-nyomó” rugóval helyettesíthető.

a) A megfelelő rugóállandók:

$$D_a = \frac{a+b}{a} \cdot D = \frac{50}{40} D = 1,25 \frac{\text{N}}{\text{cm}}, \quad D_b = \frac{a+b}{b} \cdot D = \frac{50}{10} D = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}},$$

a két „sorbakapcsolt” rugó eredő rugóállandója pedig

$$D^* = D_a + D_b = 6,25 \frac{\text{N}}{\text{cm}}.$$

Ennek megfelelően a megadott erő hatására a C pont elmozdulása 0,8 cm lesz.

b) Ha a falaktól a' , illetve $b' = 50 \text{ cm} - a'$ távolságra levő C' pontban fejtjük ki az F erőt, a gumiszálnak megfelelő rugóállandó

$$D^* = D_{a'} + D_{b'} = \frac{a'+b'}{a'} \cdot D + \frac{a'+b'}{b'} \cdot D = \frac{D(a'+b')^2}{a'b'}.$$

A C' pont elmozdulása

$$\Delta \ell = \frac{F}{D^*} = \frac{a'b'}{500 \text{ cm}},$$

ami akkor a legnagyobb, amikor $a'b'$ maximális értékét veszi fel. Felhasználva a számtani és mértani közepekre vonatkozó

$$\sqrt{a'b'} \leq \frac{a'+b'}{2}$$

egyenlőtlenséget az elmozdulás legnagyobb értékére

$$\Delta \ell_{\max} = \frac{25 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm}}{500 \text{ cm}} = 1,25 \text{ cm}$$

adódik. Ekkora elmozdulást $a' = b' = 25 \text{ cm}$ esetén tudunk létrehozni, vagyis úgy, hogy éppen a gumiszál közepén fejtjük ki az F erőt.