I. megoldás. Jelöljük a testet megmozdítani képes legkisebb erő maximális nagyságát F-fel, a vízszintessel bezárt szögét pedig α-val (*1. ábra*)! Akkor leszünk képesek a test megmozdítására, ha a húzóerő vízszintes vetülete meghaladja a tapadó súrlódási erő nagyságát:

$$F\cos\alpha \ge S = \mu N,$$

ahol N a test által az asztalra kifejtett nyomóerő. Ezt a kényszererőt a függőleges erőkomponensek egyensúlyi feltételéből számolhatjuk ki:

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

A fenti két összefüggésből:

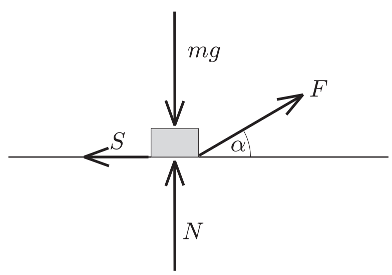
$$F\cos\alpha + F\mu\sin\alpha \ge mg\mu,$$

ami algebrai átalakítások után így is írható:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\alpha \ge \frac{mg}{F}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{1}$$

Azért célszerű ilyen alakra hozni a vizsgált egyenlőtlenséget, mert a bal oldalon szereplő szögfüggvények együtthatóinak négyzetösszege 1, tehát ezek a mennyiségek kifejezhetők egy alkalmasan választott ε hegyesszög megfelelő szögfüggvényeivel:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \sin\varepsilon, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \cos\varepsilon.$$



1. ábra

Megjegyzés. A ε szöget *súrlódási határszögnek* nevezik; ennél meredekebb lejtőn nem maradhat nyugalomban az adott tapadó súrlódással jellemezhető test. A súrlódási határszög és a súrlódási együttható közötti összefüggést $\mu = \operatorname{tg}\varepsilon$ alakban is felírhatjuk.

Ezzel a jelöléssel (1) így írható:

$$\sin\varepsilon\,\sin\alpha + \cos\varepsilon\,\cos\alpha \ge \frac{mg}{F}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,,$$

ahonnan a koszinusz függvény addíciós képletének felhasználásával adódik:

$$1 \ge \cos(\alpha-\varepsilon) \ge \frac{mg}{F}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,.$$

Ebből a test megmozdításához szükséges húzóerőt kifejezve:

$$F \ge F_{\min} = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,.$$

Az egyenlőség határesete akkor teljesül, ha $\alpha = \varepsilon$, vagyis éppen a súrlódási határszögnek megfelelő irányban húzzuk a testet. Megjegyezzük, hogy legkisebb mozgatóerő a határszög segítségével $F_{\min} = mg\,\sin\varepsilon$ módon is kifejezhető.

II. megoldás. Az I. megoldás gondolatmenetét és jelöléseit követve eljutunk odáig, hogy a test megmozdításához szükséges erő:

$$F \ge \frac{mg\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\,.$$

A legkisebb húzóerő (2) jobb oldalának minimumánál valósulhat meg. A számláló konstans, így a tört minimuma a nevező maximumához kötődik. Ez akkor teljesül, ha a derivált nulla: $-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0$, amiből $\operatorname{tg}\alpha = \mu$. Ezt beírva F kifejezésébe, $F_{\min} = mg\sin\alpha$ adódik, amit $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ segítségével kifejezve

$$F_{\min} = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,.$$

Ekkora és ilyen irányú erő kell a test elhúzásához.

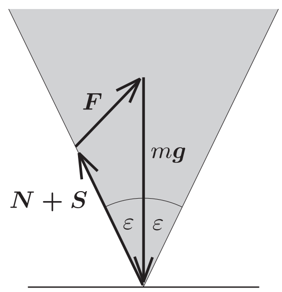
III. megoldás. A feladatot megoldhatjuk szerkesztéssel is. A megcsúszás határhelyzetében a testre ható erők vektori összege még éppen nulla:

$$\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}) = 0,$$

ahol $m\boldsymbol{g}$ a nehézségi erő, $\boldsymbol{F}$ a keresett húzóerő, $\boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}$ pedig a talaj által a testre kifejtett nyomóerő és súrlódási erő eredője. Az erőegyensúlyt zárt vektorsokszöggel ábrázolhatjuk (*2. ábra*). Az ábrán azt is figyelembe vettük, hogy határesetben (a megcsúszás pillanatában) a nyomóerő és a súrlódási erő eredőjének a szürkén jelölt, ε félnyílásszögű kúp palástjára kell esnie, hiszen ekkor teljesül a

$$\frac{|\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{N}|} = \mu = \operatorname{tg}\,\varepsilon$$

feltétel.

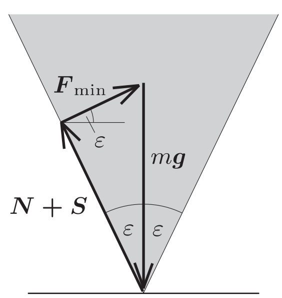


2. ábra

A fenti feltételeknek eleget tevő húzóerők közül az a legkisebb, amelyik merőleges a kúp valamelyik alkotójára (*3. ábra*). Az ábráról leolvashatjuk, hogy a minimális húzóerő nagysága

$$F_{\min} = mg\sin\varepsilon = mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,,$$

iránya pedig a vízszintessel éppen a súrlódási határszöggel megegyező szöget zár be.



3. ábra