I. megoldás. Tekintsük az egyik oldallapot, mintha csak egymaga lenne. (Ezt megtehetjük, hiszen a lapok nem vezetők, rajtuk az elektromos töltéseloszlás nem rendeződik át, ha az egyiküket kiemeljük a kockából. Így az az egyes lapok által létrehozott elektromos mezők sem függnek attól, hogy a négyzetlapok egymástól távol vannak, vagy egy kocka oldallapjait alkotják.)

Alkalmazzuk az elektrosztatika Gauss-törvényét a lemez két oldalát szorosan körülvevő zárt felületre! A lemez szimmetriái miatt a Q töltésű lapból kilépő összes elektromos fluxus (Q/ε_0) fele az egyik, fele a másik oldalon halad át. Eszerint a hat lapból összeállított kockába laponként belépő fluxus:

$$\Psi = \frac{Q}{2\,\varepsilon_0}.$$

A kocka belsejébe tehát összesen 6Ψ fluxus (a szemléltető képben ezzel arányos számú erővonal) lép be. Mivel a kocka belsejében nincs töltés, onnan – ismét a Gauss-törvényre hivatkozva – ugyanennyi fluxusnak (erővonalnak) kell kilépnie. Ez, mivel a kocka szimmetrikus, laponként Ψ kilépő fluxust jelent. Ez a fluxus

$$E = \frac{\Psi}{a^2} = \frac{Q}{2\,\varepsilon_0 a^2}$$

átlagos térerősségnek (pontosabban: a felületre merőleges térerősség-komponensnek) felel meg.

Ez a térerősség, mivel a töltött lapokon átmenő erővonalakból származik, erőt fejt ki a lapra. A kocka belsejéből kifelé mutató erő nagysága a térerősség definíciója alapján:

$$F = EQ = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0 a^2}.$$

Ekkora taszítóerő hat tehát az egyes lapokra.

II. megoldás. A feladatot megoldhatjuk az energiaviszonyok tanulmányozásával is. Távolítsuk el – gondolatban – az egyik oldallapot a kockától egy kicsiny d távolsággal ($d \ll a$)! Eközben, ha a lapot F nagyságú külső erővel tarthatjuk egyensúlyban,

$$W = -F \cdot d\,.$$

munkát végzünk. (A negatív előjel arra utal, hogy a lapra ható taszítóerőt a kocka belseje felé mutató, tehát az elképzelt elmozdulással ellentétes irányú külső erővel tarthatjuk egyensúlyban.)

Másrészt igaz, hogy a munkavégzés a rendszer elektrosztatikus energiájának megváltozásával egyenlő. Ha ki tudjuk számítani ezt az energiaváltozást, belőle a keresett F erő is megkapható.

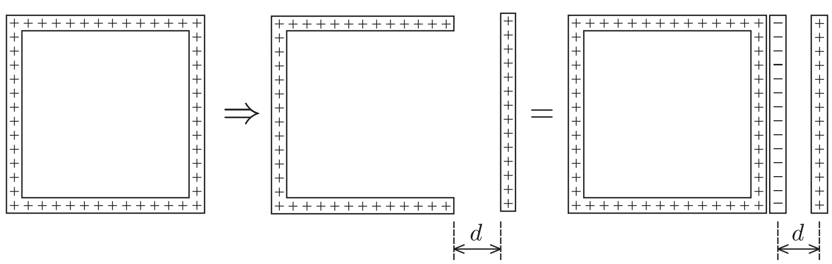
Egy adott töltéselrendeződés elektrosztatikus energiáját a töltések közötti Coulomb-potenciálok páronkénti összegzéséből is kiszámíthatjuk (jelen esetben ez technikailag nagyon nehéz eljárás lenne), de az elektromos mező energiasűrűségéből is meghatározhatjuk. Ismert (pl. egy síkkondenzátor vizsgálatából), hogy $\boldsymbol{E}$ térerősségvektorral leírt elektrosztatikus mező *egységnyi térfogatra* jutó energiája

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}^2,$$

sok kicsiny, egyenként ΔV térfogatú térrész-darab összes energiája pedig

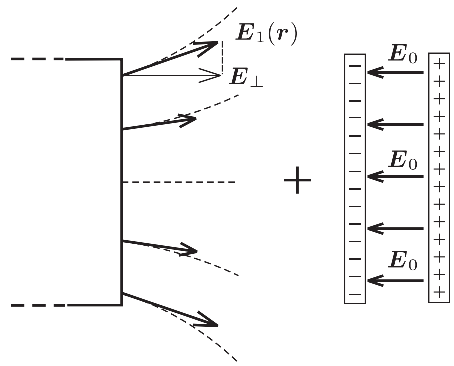
$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum \boldsymbol{E}^2 \Delta V$$

módon számítható ki. (A fenti képletben $\boldsymbol{E}$ helyére természetesen az általában helyről helyre változó térerősséget kell behelyettesítenünk, az tehát nem emelhető ki a szummából.)



1. ábra

Ha a feladatbeli kocka egyik lapját egy kicsiny d távolsággal elmozdítjuk, akkor a töltéselrendeződés éppen úgy változik meg, mintha a kocka egyik lapja mellé (annak közvetlen közelébe) egy Q töltésű, a^2 lemezméretű és d lemeztávolságú síkkondenzátort helyeztünk volna el (*1. ábra*). A síkkondenzátor elektromos mezője csak a lemezek közötti térrészre korlátozódik, az elektrosztatikus térenergia változásának kiszámításánál tehát elegendő ezzel a térrésszel foglalkoznunk. (Ez szerencse, hiszen a többi térrészben nem is, vagy csak nagyon nehezen tudnánk kiszámítani a térerősséget, és annak négyzetösszegét!)



2. ábra

Amikor a feltöltött négyzetlapok egy kockát alkotnak, az elektromos térerősség a kocka közelében valamilyen bonyolult, helyről helyre változó $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ függvénnyel írható le (lásd a *2. ábra* bal oldali részét). Az egyik oldallap kicsiny elmozdítása után az elektromos mező az eredeti $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$ és egy síkkondenzátor homogén $\boldsymbol{E}_0$ térerősségének szuperpozíciója lesz:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_0.$$

Az elektrosztatikus energia megváltozása eszerint:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum \big(\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_0\big)^2 \Delta V - \frac{\varepsilon_0}{2}\sum \big(\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})\big)^2 \Delta V =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\sum (\boldsymbol{E}_0)^2 \Delta V + \varepsilon_0 \sum \big(\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0\big)\Delta V,$$

ami így is írható:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \sum \Delta V - \varepsilon_0 E_0 \sum E_\perp \Delta V,$$

ahol $E_\perp$ az $\boldsymbol{E}_1$ térerősség felületre merőleges komponense,

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2}$$

pedig a síkkondenzátor homogén térerősségének nagysága. (2) jobb oldalának első tagjában $\sum \Delta V$ nyilván $a^2 \cdot d$-vel egyenlő, a második összeg pedig

$$\sum E_\perp \Delta V = \sum E_\perp (d \cdot \Delta F) = d \cdot \sum E_\perp \Delta F = d \cdot \Psi,$$

ahol ΔF a kocka oldallapjának kicsiny felületdarabkáinak nagyságát, Ψ pedig az oldallapon kilépő elektromos fluxust jelöli. Gauss törvénye szerint a $6Q$ töltésű kockából kilépő teljes fluxus: $6\Psi = 6Q/\varepsilon_0$, vagyis $\Psi = Q/\varepsilon_0$.

Mindezek alapján a térenergia változása:

$$W = -\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0 a^2} \cdot d,$$

amit (1)-gyel összehasonlítva a taszítóerőre az

$$F = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0 a^2}$$

végeredményt kapjuk.