I. megoldás. Legyen $\mathcal{A}$ mindazon játékok halmaza, amelyekben az A játékos nyer, míg a $\mathcal{B}$ halmaz tartalmazza a B által megnyert játékokat. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ halmazok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozunk létre, ha egy A által megnyert G játéknak az a G' játék lesz a párja, amiben minden labdamenetet épp a másik játékos nyer meg, mint ahogyan az G-ben történt. Azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges $G \in \mathcal{A}$ játék esetén

$$P(G) \leq 2p^2\big(P(G) + P(G')\big).$$

Ha ezt megtesszük, akkor

$$P(A \text{ nyer}) = \sum_{G\in\mathcal{A}} P(G) \leq \sum_{G\in\mathcal{A}} 2p^2\big(P(G)+P(G')\big) = 2p^2 \sum_{G\in\mathcal{A}} \big(P(G)+P(G')\big) =$$

$$= 2p^2\bigg(\sum_{G\in\mathcal{A}} P(G) + \sum_{G\in\mathcal{B}} P(G)\bigg) = 2p^2 \cdot P(\text{a játék véget ér}) \leq 2p^2,$$

azaz bebizonyítottuk a feladat állítását.

Ha a G játékban A l-szer és B k-szor nyert labdamenetet, akkor abból, hogy a B játékos $q = 1-p$ valószínűséggel nyer meg egy labdamenetet kapjuk, hogy $P(G) = p^l \cdot q^k$, illetve $P(G') = p^k \cdot q^l$, továbbá a játék definíciója miatt $m := l - k \geq 2$. Azt kell tehát igazolni, hogy $p^l \cdot q^k \leq 2p^2(p^l \cdot q^k + p^k \cdot q^l)$, ami azzal ekvivalens, hogy $p^m \leq 2p^2(p^m + q^m)$.

Világos, hogy $(p-q)^2 \geq 0$, ahonnan $2p^2 + 2q^2 \geq p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$ adódik. Innen

$$p^m \leq (2p^2+2q^2)p^m = 2p^2p^m + 2q^2p^m \leq 2p^2p^m + 2q^mp^2 = 2p^2(p^m+q^m),$$

ahol az utóbbi egyenlőtlenség $m \geq 2$ és $q \geq p$ miatt igaz. Nekünk pedig éppen ezt kellett bizonyítanunk. □

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha $p \leq \frac{1}{2}$, akkor $2p^2 \leq p$, és csakis akkor van egyenlőség, ha $p = \frac{1}{2}$ vagy $p = 0$. Az A játékosnak tehát rosszabb az esélye a győzelemre, mint egyetlen labdamenet megnyerésére.

Az I. megoldásban található párbaállítási ötlet egyedül Paulin Roland dolgozatában fordult elő. A feladatot szintén megoldó további versenyzők mindegyike az ilyen feladatokra szokványosabb számolásos megoldással ért célt. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát.

II. megoldás. Vegyük észre, hogy ha hat labdamenet után még nincs győztes, akkor mindkét játékos éppen három labdamenetet nyert. Világos, hogy annak a valószínűsége, hogy az A játékos k egymás utáni játszmából l-t nyer meg $\binom{k}{l}p^lq^{k-l}$, ahol $q := 1-p$ a B játékos esélye egy labdamenet megnyerésére. Figyeljük meg, hogy ha a játék legfeljebb öt labdamenet után véget ér, akkor a végeredmény akkor sem változik meg, ha a játékosok végigjátsszák az első hat labdamenetet, hisz a vesztes még ekkor is csak legfeljebb két labdamenetet nyerhet. Az A játékos győzelmének valószínűsége tehát

$$P(A \text{ nyer}) = p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3r,$$

ahol az első tag a $6:0$-ás, a második az $5:1$-es, a harmadik a $4:2$-es győzelem valószínűsége, r pedig annak a valószínűsége, hogy $3:3$-as állás után az A játékos győz. A $3:3$-as állásnál vagy valamelyik játékos megnyeri a soron következő két labdamenetet és győz, vagy mindkét játékos egy-egy labdamenetet nyer, aminek a valószínűsége $2pq$. Az így kialakult helyzetben azonban mindkét játékos győzelmi esélye azonos a $3:3$-as helyzetbeli esélyével. Tehát $r = p^2 + 2pqr$ (hiszen A p^2 eséllyel nyeri meg a soron következő két labdamenetet), azaz $r = \frac{p^2}{1-2pq}$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$P(A \text{ nyer}) = p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3\frac{p^2}{1-2pq}.$$

Nyilván $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, ahonnan $\frac{1}{1-2pq} \leq 2$ adódik. Ezt felhasználva

$$P(A \text{ nyer}) \leq p^6 + \frac{6}{4}p^4 + \frac{15}{16}p^2 + \frac{40}{64}p^2 = p^2\left(p^4 + \frac{3}{2}p^2 + \frac{25}{16}\right) =$$

$$= p^2\left(\left(p^2 + \frac{3}{4}\right)^2 + 1\right) \leq p^2\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 + 1\right) = 2p^2.$$

Egyenlőség pedig ($p \geq 0$ miatt) pontosan akkor áll, ha $p^2 = 0$ vagy ha $p^2 = \frac{1}{4}$, azaz, ha $p = 0$ vagy $p = \frac{1}{2}$. □