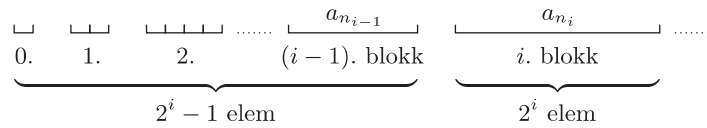


**I. megoldás.** Osszuk az  $(a_n)$  sorozatot blokkokra: a nulladik blokk álljon  $a_1$ -ből, az első legyen  $a_2, a_3$ , a másodikhoz tartozzon  $a_4, \dots, a_7$ . Általában az  $i$ -dik blokk az  $a_{2^i}$  elemtől tartalmazza a sorozat elemeit az  $a_{2^{i+1}-1}$  elemmel bezárólag.



(Ha  $2^{i+1} - 1 > N$ , akkor a blokk értelemszerűen csak  $a_N$ -ig tartalmazza a sorozat elemeit.) Tegyük fel, hogy  $k + 1$  blokkból áll az  $(a_n)$  sorozat, vagyis az utolsó blokk a  $k$ -dik. Legyen  $i < k$ -ra  $a_{n_i}$  az  $i$ -edik blokk legkisebb eleme, és legyen  $n_k = N$ . A blokkok és az  $n_i$ -k megválasztása miatt  $n_i < 2^{i+1}$ , ezért

$$n_i a_{n_{i-1}} \leq 2^{i+1} \cdot a_{n_{i-1}} = 4 \cdot 2^{i-1} a_{n_{i-1}} \leq 4 \cdot (a_{2^{i-1}} + \dots + a_{2^{i-1}-1}),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség  $a_{n_{i-1}}$  definíciójából és abból következik, hogy az  $(i - 1)$ -edik blokk éppen  $2^{i-1}$  db elemet tartalmaz. Azt kaptuk tehát, hogy az  $n_i a_{n_{i-1}}$  szorzat legfeljebb 4-szerese az  $(i - 1)$ -edik blokkban álló elemek összegének, tehát e szorzatok összege is legfeljebb 4-szerese az első  $k$  blokk összegének:

$$\sum_{i=1}^k n_i a_{n_{i-1}} < 4 \cdot \sum_{i=1}^{2^k-1} a_i \leq 4 \cdot \sum_{i=1}^N a_i \leq 4 \cdot 500 < 2005. \quad \square$$

Több versenyző is próbálkozott a feladatban szereplő összeg lehetséges értékeinek átlagolásával. Ha ugyanis ez az átlag kisebb lenne 2005-nél, az garantálná, hogy létezik a feltételt teljesítő sorozat. Másképpen fogalmazva: állítsuk elő az  $n_0, \dots, n_k$  sorozatot véletlenszerűen úgy, hogy az  $2, 3, \dots, N - 1$  indexek mindegyikét (egymástól függetlenül)  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel választjuk ki (a 0-t és az  $N$ -et mindenképpen ki kell választanunk), és vizsgáljuk meg az így előállított  $\sum n_i a_{n_{i-1}}$  véletlen összeg várható értékét. Ha a várható érték 2005-nél kisebb, akkor ez biztosítja, hogy az állítás igaz.

Ez az ötlet – ebben a formában – nem vezethet eredményre, mert  $\sum n_i a_{n_{i-1}}$  várható értéke tetszőlegesen nagy lehet. Az egyes indexek kiválasztási valószínűségének szerencsésebb megválasztásával azonban a feladat megoldható.

**II. megoldás.** Készítsük el az  $n_0, \dots, n_k$  sorozatot véletlenszerűen úgy, hogy az  $n$  indexet tetszőleges  $1 \leq n \leq N$  esetén  $p_n$  valószínűséggel választjuk ki, és legyen az egyes indexek kiválasztása egymástól független.

A valószínűségeket a következőképpen válasszuk meg:

$$p_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{ha } 1 \leq n < N; \\ 1, & \text{ha } n = N. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az 1 és az  $N$  indexeket biztosan ki kell választanunk, ennek megfelelően  $p_1 = p_N = 1$ .

Vizsgáljuk meg, hogy valamely  $1 \leq n < m \leq N$  esetén az  $ma_n$  kifejezés milyen valószínűséggel szerepel az (1) bal oldalán álló összeg tagjai között. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az  $n$  és  $m$  indexeket kiválasszuk, a közbülső indexek közül viszont egyet sem. Az  $ma_n$  tag előfordulásának valószínűsége tehát

$$p_n(1 - p_{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{m-1})p_m,$$

a teljes összeg várható értéke pedig

$$\begin{aligned} (2) \quad E\left(\sum_{i=1}^k n_i a_{n_{i-1}}\right) &= \sum_{1 \leq n < m \leq N} p_n(1 - p_{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{m-1})p_m \cdot ma_n = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left( \sum_{m=n+1}^N p_n(1 - p_{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{m-1})p_m \cdot m \right) a_n. \end{aligned}$$

Ha  $m < N$ , akkor

$$\begin{aligned} p_n(1 - p_{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{m-1})p_m \cdot m &= \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \dots \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \frac{2}{m+1} \cdot m = \\ &= \frac{4n}{(m-1)(m+1)} < \frac{4n}{(m-1)m} = \frac{4n}{m-1} - \frac{4n}{m}. \end{aligned}$$

Ha pedig  $m = N$ , akkor

$$\begin{aligned} & p_n(1 - p_{n+1}) \cdots (1 - p_{m-1})p_m \cdot m = \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdots \frac{N-2}{N} \cdot 1 \cdot N = \frac{2n}{N-1}. \end{aligned}$$

Ezeket a becsléseket beírva (2)-be,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=n+1}^N p_n(1 - p_{n+1}) \cdots (1 - p_{m-1})p_m \cdot m \leq \\ & \leq \sum_{m=n+1}^{N-1} \left( \frac{4n}{m-1} - \frac{4n}{m} \right) + \frac{2n}{N-1} = \left( \frac{4n}{n} - \frac{4n}{N-1} \right) + \frac{2n}{N-1} < 4, \end{aligned}$$

és

$$E\left(\sum_{i=1}^k n_i a_{n_{i-1}}\right) < \sum_{n=1}^{N-1} 4a_n \leq 4 \sum_{n=1}^N a_n \leq 2000.$$

Mivel a várható érték a lehetséges összegeknek a – valószínűségük szerint – súlyozott átlaga, a lehetséges összegek között biztosan létezik 2000-nél kisebb.  $\square$