**Megoldás.** Tekintsük az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon $a$-t tartalmazó részhalmazait, melyekben bármely két különböző elem különbsége legalább $t$. Legyen $H$ ezen részhalmazok halmaza. Álljon a $K$ halmaz az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz mindazon részhalmazaiból, amelyek $a$-t nem tartalmazzák, és amelyekben bármely két elem különbsége legalább $t$. Azt kell megmutatnunk, hogy $|K| \leq t^2 \cdot |H|$ teljesül.

Ezt úgy bizonyítjuk be, hogy $K$ minden eleméhez hozzárendeljük $H$ egy-egy elemét úgy, hogy $H$ minden egyes elemét $K$-nak legfeljebb $t^2$ eleméhez rendeljük hozzá. Más szóval, mutatunk egy $f \colon K \to H$ leképezést, amire az teljesül, hogy $H$ minden egyes eleme legfeljebb $t^2$ elem képeként áll elő. Tetszőleges $X \in K$ részhalmazhoz tekintsük az

$$f(X) := \big(X \setminus \{a-t+1, a-t+2, \ldots, a+t-2, a+t-1\}\big) \cup \{a\}$$

halmazt, azaz hagyjuk el $X$-ből azokat az elemeket, amik $a$-hoz $t$-nél közelebb vannak, és vegyük be $a$-t $f(X)$-be. Világos, hogy $f(X) \in H$, hisz $a \in f(X)$ teljesül, $f(X) \setminus \{a\}$ bármely eleme legalább $t$-vel különbözik $a$-tól, továbbá $f(X)$ bármely két $a$-tól különböző eleme egyúttal $X$-nek is eleme, ezért különbségük legalább $t$.

Megmutatjuk, hogy $H$ bármely $Y$ eleméhez legfeljebb $t^2$-féleképpen választhatunk olyan $X \in K$-t, amelyre $f(X) = Y$. Hogyan képezhetjük egy adott $Y$-hoz ezeket az $X$ halmazokat? Világos, hogy minden ilyen $X$-et megkaphatunk úgy, hogy $Y$-ból elhagyjuk az $a$ elemet, majd további elemeket veszünk be az $[a-t+1, a-1]$, illetve az $[a+1, a+t-1]$ intervallumból úgy, hogy az így kapott halmazban is teljesüljön, hogy bármely két elem különbsége legalább $t$. Ez azt jelenti, hogy mind az $[a-t+1, a-1]$, mind az $[a+1, a+t-1]$ intervallumokból legfeljebb egy-egy elemet választhatunk ki. Mivel mindkét intervallum $t-1$ elemet tartalmaz, azért mindkét intervallum esetén $t$-féle választási lehetőségünk van: $(t-1)$-féleképp választhatunk ki egy elemet, illetve egyféleképp tehetjük meg, hogy nem választunk egyetlen elemet sem. Összességében tehát legfeljebb $t \cdot t = t^2$ a lehetőségeink száma. Ezért $H$ tetszőleges eleme legfeljebb $t^2$ $K$-beli elem képe, így csakugyan igaz, hogy

$$|K| \leq t^2 |H|. \quad \square$$

*Megjegyzés.* A fenti becslés $t > 2$ esetén javítható, ugyanis amikor $Y \in H$-hoz konstruálunk olyan $X \in K$-t, amire $f(X) = Y$ teljesül, akkor általában nem tehetjük meg, hogy tetszőlegesen választjuk az $[a-t+1, a-1]$-beli és az $[a+1, a+t-1]$-beli elemeket. Ügyelnünk kell ugyanis arra is, hogy e két kiválasztott elem különbsége se legyen $t$-nél kisebb. Ezt figyelembe véve a becslésbeli $t^2$ tényező $\dfrac{1}{2} \cdot (t^2 + 3t - 2)$-re javítható.