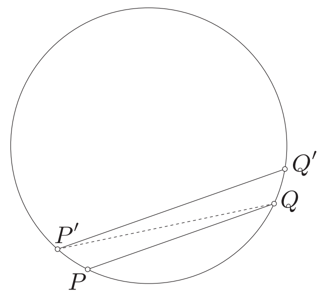
Megoldás. Vegyük észre, hogy $n \geq 5$ esetén egy szabályos n oldalú sokszög csúcsainak H' halmaza teljesíti a feladatban előírt (c) feltételt.

Legyenek ugyanis $P, Q \in H'$ tetszőleges csúcsok. Ekkor a PQ egyenesnek valamelyik partján legalább két H'-beli pont van. Tekintsük ebben a félsíkban a szabályos sokszögnek a P-vel szomszédos P', illetve a Q-val szomszédos Q' csúcsát. Mivel a szabályos n-szög körülírt körén PP' és QQ' azonos nagyságú ívet határoznak meg, azért a hozzájuk tartozó PQP' és $QP'Q'$ kerületi szögek egyenlőek, tehát e szögek a párhuzamos PQ és $P'Q'$ egyenesekhez tartozó váltószögek.



Válasszunk egy 1002 oldalú szabályos sokszöget, és egy ettől különböző síkba eső, 1004 oldalú szabályos sokszöget úgy, hogy O középpontjuk közös legyen, és a két sokszög síkjának metszésvonalán egyik sokszögnek se legyen csúcsa. Állítjuk, hogy e két sokszög csúcsainak H halmaza megfelelő, ezért a feladat kérdésére igen a válasz.

Világos, hogy H-nak éppen 2006 pontja van. A konstrukció miatt H pontjai nem esnek egy síkba: (a) teljesül. A szabályos sokszögek konvex tulajdonsága miatt egy egyenes a két sokszög bármelyikének legfeljebb két csúcsát tartalmazhatja. Márpedig ha egy egyenes valamelyik sokszögből két csúcsot tartalmaz, akkor annak a síkjában fut, tehát a másik sokszögnek nem tartalmazza egyetlen további csúcsát sem. A (b) tulajdonság is teljesül tehát.

A (c) tulajdonság igazolásához tegyük fel először, hogy P és Q ugyanannak a sokszögnek csúcsai. Ekkor legelső megfigyelésünk szerint találunk megfelelő P'-t és Q'-t már ugyanebben a sokszögben is. Ha azonban P és Q nem ugyanabba a sokszögbe esnek, akkor az O-ra vonatkozó P' és Q' tükörképeik szintén H-beliek, különböznek P-től és Q-tól, és $PQ \parallel P'Q'$. $\square$

Megjegyzés. A fenti megoldásban vázolt konstrukció szépséghibája, hogy túl sok (szám szerint 1004) pont esik egy síkba. Természetes kérdés, hogy a feladat feltételeit teljesítő H halmazban legfeljebb hány pontnak engedhetjük meg, hogy egy síkba essen. Egyrészt világos, hogy egy ilyen H halmaznak mindig van 4 egysíkú pontja, hisz ha $PQ \parallel P'Q'$, akkor a P, Q, P', Q' pontok közös síkban fekszenek. Másfelől, a megoldás konstrukciójának módosításával tudunk olyan H-t mutatni, ahol ez a szám 6. Ha ugyanis 501 különböző síkban fekvő, szabályos hatszöget választunk úgy, hogy az egyik átmérőjük közös, akkor e hatszögek csúcsainak H halmaza is megfelel a feladatbeli feltételeknek. Sajnos azonban a hatszögek közös átmérőjére merőleges síkok közül kettő is tartalmaz 1002 pontot. Ezen úgy tudunk segíteni, hogy nem szabályos hatszögekből, hanem azok vetületeiből építkezünk. Könnyen látható, hogy az ezen hatszögek csúcsai alkotta halmaz is megfelelő, és alkalmas vetítések választásával elérhető, hogy a legtöbb egysíkú pontot akkor kapjuk, ha egy konstrukcióbeli hatszög síkját tekintjük.

A feladat megoldásában leírt konstrukció egy másik sajátossága, hogy a kapott H halmaz centrálszimmetrikus lesz. Ennek egy következménye, hogy H páros számú pontot tartalmaz. Létezik azonban páratlan sok (mondjuk 2007) pontból álló H halmaz is, azonban a középpontos szimmetria abban is lényeges szerepet kap. Belátható, hogy ha két nem egysíkú, közös átmérőjű szabályos 1004 oldalú szabályos sokszög csúcsai közül elhagyjuk az egyik közös csúcsot, akkor az (a), (b) és (c) feltételt kielégítő, 2007 pontú H halmazt kapunk. Nem világos, hogy páratlan méretű, kívánt tulajdonságú halmazból létezik-e olyan, ami nem „ennyire” centrálszimmetrikus. Mint láttuk, a síkban van ilyen, pl. egy páratlan oldalú szabályos sokszög (vagy annak vetülete).