Megoldás. *a*) Vizsgáljuk először a „legfeljebb mekkora …” esetet!

Az üstökösök – ahogy a bolygók is – ellipszispályán keringenek, melynek egyik gyújtópontjában a Nap található. Egy ellipszispályán keringő égitest pillanatnyi sebességét (a Naphoz rögzített koordináta-rendszerben) a

$$v_p = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

képlet adja meg, ahol a a fél nagytengely, M a Nap tömege, r pedig a vezérsugár aktuális értéke. Ez a sebesség – adott r mellett – akkor a legnagyobb, ha az üstökös nagyon messziről („végtelen” távolból) jön. Ilyenkor $\dfrac{1}{a}$ gyakorlatilag nulla, vagyis az üstökös sebessége

$$v_{\text{ü}} \le \sqrt{\gamma M \frac{2}{r}}.$$

Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor az üstökös a Földbe csapódik, r a Földnek a Naptól mért távolságával kell egyenlő legyen. Az üstökös sebessége (ami $1/\sqrt{r}$-rel arányos) akkor a legnagyobb, amikor a Föld napközelben van. Ekkor $r = 1{,}47 \cdot 10^{11}$ m, $v_{\text{ü}} \le 42{,}4\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ és a Föld sebessége (a Naphoz viszonyítva)

$$v_{\text{F}} \approx 30{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Vizsgáljuk meg az üstökös sebességét a *Földhöz viszonyítva!* Az üstökös akkor érkezik a lehető legnagyobb sebességgel a Föld közelébe, ha a Föld keringési sebességével ellentétes irányú a sebessége (és a Föld felé tart). Ekkor a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben az üstökös sebessége legfeljebb

$$v_{\text{rel.}} = v_{\text{F}} + v_{\text{ü}} = 72{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

lehet.

Figyelembe kell még vegyük, hogy a fentebb kiszámított relatív sebességet a becsapódásig a Föld gravitációs vonzása tovább növeli. A gravitációs mező munkája (mialatt az m tömegű üstököst a végtelenből az R sugarú Föld felszínére vonzza) az üstökös mozgási energiáját, és így a sebességét is növeli:

$$W_{\text{grav.}} = \Delta E_{\text{mozg.}},$$

vagyis

$$-\gamma M m \left(\frac{1}{R_{\text{messzi}}} - \frac{1}{R}\right) \approx \gamma \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v_{\text{becsap.}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{rel.}}^2.$$

Átrendezve és m-mel osztva kapjuk:

$$v_{\text{becsap.}} \le \sqrt{v_{\text{rel.}}^2 + 2\gamma \frac{M_F}{R}} \approx \sqrt{72{,}6^2 + 11{,}2^2}\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 73{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

a Nap körül keringő üstökös tehát legfeljebb ekkora sebességgel érheti el a Földet.

b) Vizsgáljuk most a „legalább mekkora …” esetet!

Az üstökös és a Föld relatív sebessége (a föld gravitációs vonzásának számottevő hatása előtt) tetszőlegesen kicsi lehet; ehhez „csupán” az szükséges, hogy az üstökösnek a Nap körüli keringési sebessége és a Földnek a Nap körüli sebessége a lehető legjobban megegyezzék. Ez akkor valósul meg, ha az üstökös pályája a lehető legjobban hasonlít a Föld pályájához, vagyis az üstökös gyakorlatilag a Föld pályáján kering.

Ha egy ilyen – elképzelt – üstökös a Földet lassan megközelítené, a Föld gravitációs vonzása felgyorsítaná, és az üstökös a Földbe csapódna. (A Föld pályáján ténylegesen nincsenek veszélyes üstökösök, ha lennének, akkor azokat már bizonyára régen észrevettük volna!) A becsapódás sebessége most is ugyanúgy számolható ki, mint az előző esetben, de $v_{\text{rel.}}$ helyébe nullát írhatunk:

$$v_{\text{becsap.}} \ge \sqrt{2\gamma \frac{M_F}{R}} \approx 11{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A Nap körül keringő üstökös tehát legalább ekkora sebességgel éri el a Földet, ha annak csapódik.

Megjegyzés. A fent kiszámított becsapódási sebességek nem a Föld felszínéhez, hanem a Föld középpontjához viszonyítva értendők. Ha figyelembe vesszük azt a tényt, hogy a Föld forgása miatt az Egyenlítő pontjai kb. 0,5 km/s sebességgel mozognak, a felszínhez viszonyított legnagyobb becsapódási sebesség (egy légkör nélküli Földön) akár 74 km/s is lehetne, a legkisebb becsapódási sebesség pedig 10,7 km/s-ra mérséklődhetne.