Megoldás. A v sebességgel mozgó m tömegű, e töltésű elektront az eBv Lorentz-erő tartja r sugarú körpályán. Ha a newtoni fizika (nemrelativisztikus) törvényeit alkalmazzuk, az

$$eBv=\frac{mv^2}{r} \tag{1}$$

mozgásegyenletet írhatjuk fel. Mivel az elektron sebessége és a mozgási energiája közötti kapcsolatot az

$$E_\mathrm{m}=\frac{1}{2}mv^2,\qquad \text{azaz}\qquad v=\sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{m}} \tag{2}$$

összefüggésekből számíthatjuk, (1) és (2)-ből a pályasugárra

$$r=\frac{\sqrt{2E_\mathrm{m}m}}{eB} \tag{3}$$

adódik.

Vajon jogos-e a newtoni fizika összefüggéseinek használata a jelen esetben? Számoljuk ki a pályasugarat relativisztikusan is, és vessük össze az eredményt a klasszikus képlettel! Ha a továbbiakban m-mel az elektron nyugalmi tömegét jelöljük, E-vel az összenergiáját, p-vel pedig az impulzusát, akkor a következő relativisztikus képleteket írhatjuk fel:

$$E=mc^2+E_\mathrm{m}, \tag{4}$$

$$E=\sqrt{\left(mc^2\right)^2+\left(pc\right)^2}, \tag{5}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

és a körmozgásra vonatkozó mozgásegyenletet:

$$eBv=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{v^2}{r}=\frac{pv}{r}. \tag{6}$$

Ez utóbbiból a pályasugár kifejezhető:

$$r=\frac{p}{eB},$$

majd (5) és (4) segítségével a formula

$$r=\frac{\sqrt{E_\mathrm{m}^2+2mc^2E_\mathrm{m}}}{ceB} \tag{7}$$

alakra hozható.

Jobban össze tudjuk hasonlítani a nemrelativisztikus és a relativisztikus képletből számolt pályasugarakat, ha az elektron mozgási energiáját az $mc^2=510$ keV egységekben mérjük. Legyen

$$\lambda=\frac{E_\mathrm{m}}{mc^2},$$

ekkor (3) szerint

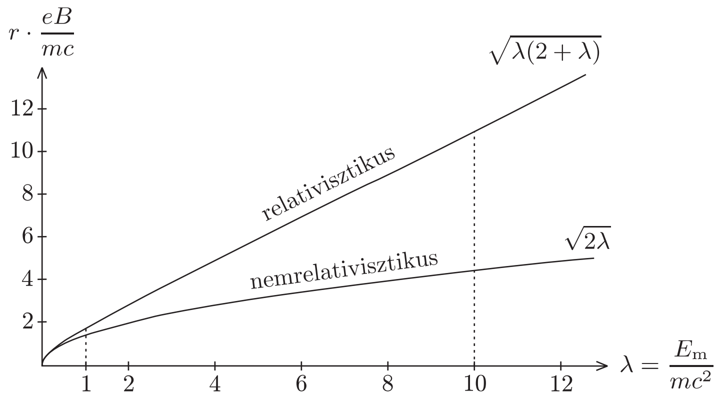
$$r_\text{nemrel.}=\frac{mc}{eB}\cdot\sqrt{2\lambda},$$

míg (7) alapján

$$r_\text{rel.}=\frac{mc}{eB}\cdot\sqrt{\lambda(2+\lambda)}.$$

A kétféle formulából számolt pályasugarakat ($(mc)/(eB)$ egységekben mérve) az *ábra* szemlélteti. A négyzetgyökök előtt álló kifejezés a feladatban szereplő 1 teslás mágneses indukció esetén

$$\frac{mc}{eB}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1}\ \mathrm{m}=1{,}7\ \mathrm{mm}.$$



Számítsuk ki most a pályasugarakat a feladatban megadott energiákra!

a) Az első esetben $\lambda = \dfrac{1}{100} \ll 1$, ilyenkor a nemrelativisztikus és a relativisztikus számolás ugyanarra az eredményre, 0,24 mm-re vezet.

b) Ugyancsak jó a nemrelativisztikus közelítés $\lambda = \dfrac{10}{510} \approx 0{,}02$-nél, a pályasugár 0,34 mm.[1]

c) Az 51 MeV-es elektronok mozgási energiája a nyugalmi energia 100-szorosa, tehát $\lambda \gg 1$. Ez az ultrarelativisztikus határeset, amikor az ilyenkor helyes relativisztikus képlet 17 cm-t, a hibás klasszikus formula pedig csak 2,4 cm-t ad.

Az ábrán az *a*) és *b*) esetet nem tudtuk feltüntetni, mert a választott lépték mellett az origótól vonalvastagságnyira helyezkednek el. Az azonban jól látszik, hogy a kétféle képlet eredménye itt – gyakorlatilag – megegyezik. Az eltérés $\lambda \approx 1$-nél válik számottevővé, az ultrarelativisztikus *c*) határeset pedig már nem fér rá a rajzra, helyette $\lambda = 10$-et jelöltük be. Ebben az energiatartományban a klasszikus és a relativisztikus számolás alapvetően különböző eredményre vezet.

[1] A Szerkesztőbizottság eredeti szándéka szerint a *b*) kérdésben 510 keV-os energiát adott volna meg (az angol fordításban ez a számérték szerepelt), ez éppen $\lambda = 1$-nek felel meg. Ilyenkor a klasszikus és a relativisztikus számolás eredménye már észrevehetően eltér egymástól.