I. megoldás. A rúd lengésidejét úgy határozzuk meg, hogy keresünk egy vele azonos periódusidejű matematikai ingát. Ha egy $l^\star$ hosszúságú fonálinga – azonos kezdeti kitérítés mellett – ugyanúgy leng, mint a feladatban szereplő rúd, akkor a mozgásukra jellemző adatok (szögkitérés, szögsebesség, szöggyorsulás) is minden pillanatban megegyeznek.

Ha a rúd az egyensúlyi helyzetéhez képest α szöget elfordul, akkor tömegközéppontja vízszintes irányban $\frac{l}{2}\sin\alpha$ távolságnyit eltolódik, emiatt a gravitációs erő a csuklóra vonatkoztatva

$$M_1 = -Mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

forgatónyomatékot fejt ki. Másrészt a csuklótól $x = \frac{3}{4}l$ távolságban levő rugó a (kicsinynek feltételezett) elfordulás miatt $x\alpha \approx x\sin\alpha$ értékkel összenyomódik, és így

$$M_2 = -Dx^2\sin\alpha = -\frac{9}{16}Dl^2\sin\alpha$$

forgatónyomatékkal hat a rúdra. A

$$\Theta = \frac{1}{3}Ml^2$$

tehetetlenségi nyomatékú rúd β szöggyorsulását a forgómozgás alapegyenlete határozza meg:

$$M_1 + M_2 = \Theta\beta,$$

vagyis

$$\beta = -\frac{Mg\frac{l}{2} + \frac{9}{16}Dl^2}{\frac{1}{3}Ml^2}\sin\alpha.$$

Másrészt tudjuk, hogy egy $l^\star$ hosszúságú matematikai inga mozgásegyenlete

$$\beta = -\frac{g}{l^\star}\sin\alpha.$$

A két mozgásegyenlet akkor lesz ugyanolyan alakú, ha

$$l^\star = \frac{16\,Mgl}{24\,Mg + 27\,Dl},$$

a rúd lengésideje tehát (kis kitérések esetén):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{16\,Ml}{24\,Mg + 27\,Dl}}.$$

II. megoldás. A fizikai ingából és a hozzá kapcsolt rugóból álló rendszer összenergiája (a mozgási energia, a gravitációs helyzeti energia és a rugó rugalmas energiájának összege) a mozgás során időben állandó:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega^2 + Mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}D\left(\frac{3}{4}l\sin\alpha\right)^2 = \text{állandó},$$

ahol α a rúd szögkitérése, ω pedig a szögsebessége. Képezzük a fenti kifejezés idő szerinti deriváltját (és használjuk ki, hogy α deriváltja ω-val, a szögsebesség deriváltja pedig a β szöggyorsulással egyenlő):

$$0 = \frac{1}{3}Ml^2\cdot\omega\beta + Mg\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\omega + D\frac{9l^2}{16}\sin\cos\alpha\cdot\omega.$$

Innen (a kis kitéréseknél alkalmazható $\sin\alpha\approx\alpha$, $\cos\alpha\approx 1$ közelítéssel) a szöggyorsulás kifejezhető a szögkitéréssel:

$$\beta = -\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{27}{16}\frac{D}{M}\right)\alpha = -\omega_0^2\alpha,$$

ami a harmonikus rezgőmozgásra jellemző mozgásegyenlet, és a hozzá tartozó periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{16\,Ml}{3(9Dl + 8Mg)}}.$$