I. megoldás. Táblázati adatok szerint az alumínium kilépési munkája

$$W = 4{,}25\ \mathrm{eV} = 6{,}8 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Ez az érték sokkal kisebb, mint az elektron mc^2 nyugalmi tömege, ezért feltehető, hogy a nemrelativisztikus energia- és impulzus-képletekkel számolhatunk.

A fényelektromos jelenségnél az energiamegmaradás

$$E_\mathrm{f} = W + E_\mathrm{e}$$

alakban írható fel, ahol a foton energiája és az impulzusa között

$$E_\mathrm{f} = cp_\mathrm{f}$$

az összefüggés, az elektron mozgási energiája és impulzusa között pedig

$$E_\mathrm{e} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p_\mathrm{e}^2}{2m}.$$

Az energia-tétel tehát:

$$cp_\mathrm{f} = W + \frac{p_\mathrm{e}^2}{2m}.$$

Osszuk el a fenti egyenletet cp_e-vel:

$$\frac{p_\mathrm{f}}{p_\mathrm{e}} = \frac{W}{cp_\mathrm{e}} + \frac{p_\mathrm{e}}{2mc},$$

majd alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{p_\mathrm{f}}{p_\mathrm{e}} \geq 2\sqrt{\frac{W}{cp_\mathrm{e}} \cdot \frac{p_\mathrm{e}}{2mc}} = \sqrt{\frac{2W}{mc^2}} \approx 4{,}08 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{245}.$$

A fémből kilökött „fotoelektronok” impulzusa tehát a fotonok impulzusának *legfeljebb* 245-szöröse lehet.

II. megoldás. Számoljuk az elektron mozgási energiáját a relativisztikus

$$E_\mathrm{e} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_\mathrm{e}^2} - mc^2$$

összefüggésből, ahol m az elektron *nyugalmi* tömege:

$$cp_\mathrm{f} = W + \sqrt{m^2c^4 + c^2p_\mathrm{e}^2} - mc^2.$$

Célszerű minden energiát az elektron mc^2 nyugalmi energiájához, az impulzusokat pedig az mc mennyiséghez viszonyítani, vagyis bevezetni a következő jelöléseket: $W = k \cdot mc^2$, $p_\mathrm{e} = y \cdot mc$, $p_\mathrm{f} = x \cdot mc$. Ezekkel az energiamegmaradás

$$x = k + \sqrt{1 + y^2} - 1$$

alakba írható, ahonnan y (az elektron impulzusa) kifejezhető x-szel (a foton impulzusával):

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 2x(1-k) - k(2-k)}.$$

A kérdéses hányados tehát

$$\frac{p_\mathrm{e}}{p_\mathrm{f}} = \frac{y}{x} = \sqrt{1 + \frac{2(1-k)}{x} - \frac{k(2-k)}{x^2}} \equiv f(x),$$

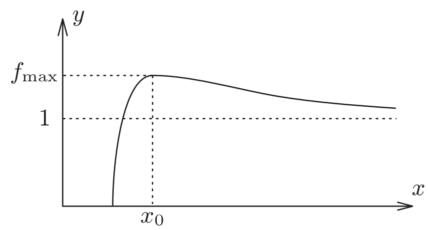
és ennek az $f(x)$ függvénynek keressük a lehetséges értékeit. Ábrázolva $f(x)$-et (lásd az *ábrát*) látható, hogy a függvénynek egy bizonyos $x = x_0$ értéknél maximuma van. A maximum helyét és a hozzá tartozó f_max értéket differenciálszámítással, vagy elemi úton, a gyök alatti kifejezés (amely $\frac{1}{x}$-ben másodfokú) teljes négyzetté alakításával is meghatározhatjuk:

$$f = \sqrt{\frac{1}{k(2-k)} - k(2-k)\left[\frac{1}{x} - \frac{1-k}{k(2-k)}\right]^2} \leq \sqrt{\frac{1}{k(2-k)}} = f_\mathrm{max}.$$

Jelen esetben $k = 8{,}3 \cdot 10^{-6} \ll 1$, így

$$f_\mathrm{max} \approx \sqrt{\frac{1}{2k}} \approx 245,$$

amely közelítés éppen a nemrelativisztikus számolás eredményének felel meg.



y
$f_{\max}$
1
x
x_0