Megoldás. A gravitációs térerősség (nehézségi gyorsulás) nagysága egy M tömegű, R sugarú, ϱ sűrűségű (homogén) gömb felszíne felett h magasságban:

$$g_1=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}=\gamma\frac{4R^3\pi\varrho}{3(R+h)^2}.$$

A felszín alatt h mélységben a gravitációs térerősséghez a bolygónak csak az $(R-h)$ sugarú, M' tömegű részének vonzása ad járulékot:

$$g_2=\gamma\frac{M'}{(R-h)^2}=\gamma\frac{4(R-h)^3\pi\varrho}{3(R-h)^2}=\gamma\frac{4(R-h)\pi\varrho}{3}.$$

A két térerősség akkor egyenlő nagyságú, ha fennáll, hogy

$$\frac{R^3}{(R+h)^2}=R-h.$$

Ez $h=0$ esetén nyilvánvalóan teljesül, de akkor is, ha

$$\frac{R}{h}=\frac{R+h}{R},$$

azaz

$$\frac{h}{R}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618.$$

(Ez a szám a híres *aranymetszés* arányszáma.)

A gravitációs potenciál a felszín felett h magasságban (ha a potenciált a szokásos módon a végtelenben választjuk nullának):

$$U_1(h)=-\gamma\frac{M}{R+h}=-\gamma\frac{4R^3\pi\varrho}{3(R+h)}.$$

Megjegyzés. A negatív előjel a gravitáció vonzó jellegének következménye. A gravitációs potenciál – az elektrosztatikus potenciállal analóg módon – azzal a munkával egyenlő, amennyi árán egy egységnyi tömegű testet a „végtelenből” az adott helyre vihetünk. Ez a munka negatív, mert egy testnek a végtelenbe távolításához kell munkát végeznünk.

A felszín alatt h mélységben a gravitációs potenciál abszolút értékét úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk, mekkora W munkával vihetünk el onnan egy egységnyi tömegű testet a végtelenbe. A munkavégzést két részre bonthatjuk. A testet h mélységből a felszínig emelve a gravitációs térerősség lineárisan változik $g_2(R-h)$ és $g_2(R)$ között, számolhatunk tehát ezek átlagos értékével (a számtani közepükkel):

$$W_1=\frac{g_2(R-h)+g_2(R)}{2}h=\gamma\frac{2\pi\varrho}{3}(2R-h)h.$$

A munkavégzés másik része az egységnyi tömegű testnek a bolygó felszínéről a végtelenbe távolításához szükséges munka, ami $|U_1(h)|$-nek $h=0$-hoz tartozó értéke:

$$W_2=\gamma\frac{M}{R}=\gamma\frac{4R^2\pi\varrho}{3}.$$

Eszerint

$$U_2(h)=-(W_1+W_2)=-\gamma\frac{2\pi\varrho}{3}\left[(2R-h)h+2R^2\right].$$

A két potenciál aránya h korábban meghatározott értékénél:

$$\frac{U_2}{U_1}=\left(1+\frac{h}{R}\right)\left[1+\frac{h}{R}\left(1-\frac{h}{2R}\right)\right]=\frac{7+\sqrt{5}}{4}\approx 2{,}31.$$