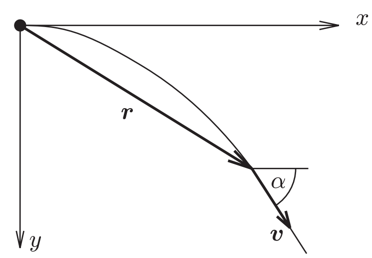
Megoldás. *a*) Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a test kiindulási helye az origó legyen, az y tengely pedig függőlegesen lefelé álljon.



Ebben a koordináta-rendszerben a test elmozdulásvektora és a sebességvektora:

$$\boldsymbol{r}=\left(v_0t;\frac{g}{2}t^2\right),\quad \text{illetve}\quad \boldsymbol{v}=(v_0;gt).$$

Ennek a két vektornak a skalárszorzatát kifejezhetjük a vektorok nagyságával és a közbezárt szögük koszinuszával:

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{v}|\cdot\cos\alpha,$$

ami a derékszögű koordinátákkal kifejezve:

$$r_xv_x+r_yv_y=\sqrt{r_x^2+r_y^2}\,\sqrt{v_x^2+v_y^2}\cdot\cos\alpha,$$

tehát

$$tv_0^2+\frac{g^2}{2}t^3=\sqrt{v_0^2t^2+\frac{g^2}{4}t^4}\cdot\sqrt{v_0^2+g^2t^2}\cdot\cos\alpha.$$

Innen algebrai átalakítások után a $w=\left(\dfrac{g}{v_0}t\right)^2$ mennyiségre egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$w^2+(4-\operatorname{ctg}^2\alpha)w+4=0, \tag{1}$$

ami $\alpha=15^\circ$ esetén numerikusan így néz ki:

$$w^2-9{,}928w+4=0.$$

Ennek gyökei:

$$w_1=0{,}42\qquad\text{és}\qquad w_2=9{,}51,$$

a kérdéses időpontok tehát

$$t_1=\frac{v_0}{g}\sqrt{w_1}\approx 0{,}66\ \text{s}\qquad\text{és}\qquad t_2=\frac{v_0}{g}\sqrt{w_2}\approx 3{,}14\ \text{s}.$$

b) Az (1) egyenletből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-4=w+\frac{4}{w}. \tag{2}$$

Alkalmazva a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$w+\frac{4}{w}\ge 2\sqrt{w\cdot\frac{4}{w}}=4,$$

ahonnan (2)-ből

$$\operatorname{ctg}^2\alpha\ge 8,\qquad \operatorname{tg}\alpha\le\frac{1}{\sqrt{8}},\qquad \alpha\le 19{,}5^\circ. \tag{3}$$

Az α szögre vonatkozó egyenlőtlenséget úgy is megkaphatjuk, hogy megvizsgáljuk, mikor van az (1) egyenletnek w-re valós megoldása. A diszkrimináns nemnegatív volta éppen a (3) egyenlőtlenséggel egyenértékű feltétel.

Az α szög legnagyobb értékét differenciálszámítással is meg lehet határozni. Ha az α szöget (vagy annak valamilyen függvényét) kifejezzük a t idővel, és megkeressük ezen függvény deriváltjának zérushelyét, akkor a szög szélsőértékére a (3) egyenlőtlenség határesetét kapjuk.