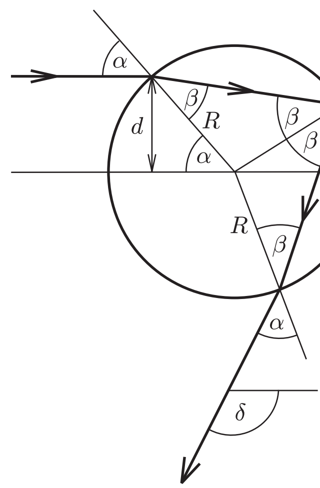
Megoldás. *a*) A gömb szimmetriája miatt feltételezhetjük, hogy a fénysugár az *1. ábrán* látható módon vízszintesen érkezik.



1. ábra

Az ábra jelöléseit követve és a $b = d/R$ dimenziótlan beesési paramétert használva felírhatjuk, hogy

(1) $$\alpha = \arcsin b,$$

továbbá a Snellius–Descartes-törvény alapján

(2) $$\beta = \arcsin \frac{b}{n}.$$

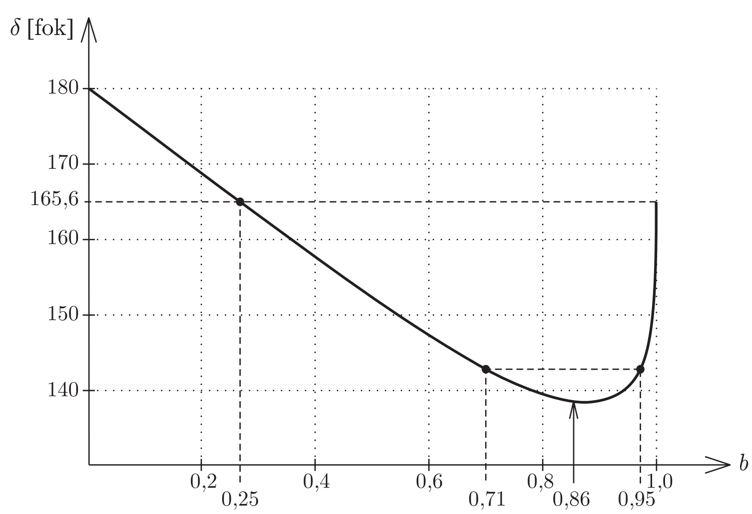
Az eltérülés δ szöge az ábráról könnyen leolvasható:

$$\delta = 2(\alpha - \beta) + (180^\circ - 2\beta) = 2\alpha + 180^\circ - 4\beta,$$

ami (1) és (2), valamint n értékének felhasználásával

(3) $$\delta(b) = 2\arcsin b + 180^\circ - 4\arcsin \frac{3b}{4}.$$

A $\delta(b)$ függvény grafikonját mutatja a *2. ábra*. (A függvény páratlan, emiatt elegendő csak a $0 \le b \le 1$ értékeket vizsgálnunk.) A grafikonról leolvasható, hogy ha b nagyobb, mint egy kritikus b_k érték, akkor két különböző b értékhez (párhuzamosan érkező két különböző fénysugárhoz) ugyanakkora eltérülési szög tartozik, tehát ezek a sugarak a vízcseppből kilépve ismét párhuzamosan haladnak tovább. A grafikonról leolvasható, hogy $b_\mathrm{k} \approx 0{,}25$, ez az érték numerikus számolással (akár már egy zsebszámológéppel is) pontosítható: $b_\mathrm{k} \approx 0{,}2516$. A megfelelő kritikus beesési szög: $\alpha_\mathrm{k} \approx 14{,}57^\circ$.



2. ábra

b) A 45°-os beesési szöghöz tartozó b paraméter

$$b_1 = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71.$$

Ennek keressük a „párját", vagyis azt a b_2 értéket, melyre $\delta(b_2) = \delta(b_1)$. A 2. ábráról leolvashatjuk, hogy $b_2 \approx 0{,}95$; a két sugár távolsága tehát

$$\Delta d = R\,(b_2 - b_1) = 0{,}5\ \text{mm} \cdot (0{,}95 - 0{,}71) = 0{,}12\ \text{mm}.$$

Megjegyzés. A 2. ábrán megfigyelhető, hogy a $\delta(b)$ függvénynek szélsőértéke (minimuma) van egy bizonyos b_0 értéknél. Differenciálszámítással bebizonyítható, hogy $b_0 = \sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}} \approx 0{,}861$, ez $\alpha_0 = 59{,}4^\circ$-os beesési szögnek felel meg. Ennek „környékén" érkező párhuzamos fénysugarak (pl. napsugarak) a cseppből (pl. egy felhő parányi vízcseppeiből) kilépve továbbra is jó közelítéssel párhuzamosak maradnak, tehát mind bejuthatnak egy távoli megfigyelő szemébe. Ez a megfigyelő a $\delta(b_0)$-nak megfelelő irányból erősebb fényt észlel, mint máshonnan, tehát egy fényes körívet lát az égen. Mivel az n törésmutató nagysága függ a fény hullámhosszától (színétől), a fényes körív helyzete is színfüggő lesz. Ez a *szivárvány* jelensége.