

Megoldás. Tekintsük az f egyenesnek egy sem g -vel, sem h -val nem közös pontját. (Ilyen biztosan van, hiszen f, g, h a tér különböző egyenesei.) Vegyük a g egyenesnek két, f -fel és h -val nem közös pontját. Mindkét pont f kiválasztott pontjával meghatároz egy-egy egyenest, amelyeknek a feladat szerint van h -val közös pontja. Ez a két egyenes meghatároz egy síkot. Ezen a síkon g -nek és h -nak is 2-2 pontja van, vagyis az egész g és h egyenes ezen a síkon van. Az f egyenes is ezen a síkon van, hiszen ha nem így lenne, akkor vennénk egy a síkon kívüli pontját, és a g egyenes egy f -fel és h -val nem közös pontját. Az ezek által meghatározott egyenes metszené a síkot, és így csak egy közös pontja lenne a síkkal, amivel a g egyenest metszené, így a h egyenest már nem metszhetné.

Tehát az f, g, h egyenesek egy síkon vannak.

Ha f -nek és g -nek van közös pontja, akkor egy, a síkon kívüli pont és a metszéspont által meghatározott egyenesnek csak akkor van h -val is közös pontja, ha az f és g közös pontja egyben h pontja is. Így ha veszünk az f, g és h egyenesek síkjában egy $e \parallel h$ egyenest, annak lesz közös pontja f -fel és g -vel (hiszen mivel f, g és h egy pontban metszik egymást, ezért $f \nparallel h$ és $g \nparallel h$, így $e \nparallel f$ és $e \nparallel g$), azonban nem lesz h -val is közös pontja. (Hiszen $e \parallel h$.) Így az f és g egyenesnek nem lehet közös pontja, vagyis $f \parallel g$.

Ha $h \nparallel f$, akkor veszünk egy e -vel párhuzamos h egyenest az f, g, h egyenesek síkjában. Ennek van f -fel és g -vel közös pontja, de nincs h -val. Így $h \parallel f$, vagyis

$$f \parallel g \parallel h.$$

Az e egyenesnek csak akkor lesz f -fel és g -vel is közös pontja, ha az f, g, h egyenesek által meghatározott síkban van és nem párhuzamos velük. De ekkor h -val sem párhuzamos, vagyis valóban vele is van közös pontja.

Tehát az f, g, h egyenesek egy síkban vannak és párhuzamosak.