I. megoldás. A cső tengelyében levő vezetékben és a cső falában folyó áram hatására mágneses mező alakul ki. Ez a mező a fémcső falában mozgó töltéshordozókra Lorentz-erőt fejt ki. Ez az erő növelni (vagy csökkenteni) igyekszik a fémcső sugarát; hatására a cső mérete megváltozik. A deformáció során a fémben rugalmas feszültségek alakulnak ki. A rendszer egyensúlyi állapotában a mágneses erők és a rugalmas erők éppen egyensúlyt tartanak.

A helyzetet kicsit bonyolítja, hogy a cső falában a mágneses mező nagysága nem állandó! A cső belső oldalánál csak a cső közepén haladó huzal áramát kell számításba vennünk (hiszen a cső árama a cső belsejében nem hoz létre mágneses teret), így ott a mágneses indukció

$$B_{\text{belül}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

míg a cső külső szélénél (a vezetékben és a csőben folyó, egymással ellentétes irányú áramok együttes hatására) már nincs mágneses tér:

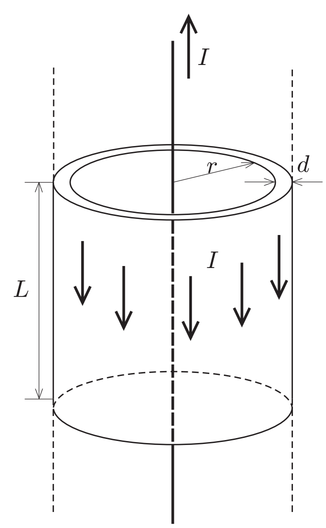
$$B_{\text{kívül}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+d)} = 0.$$

Természetesen minden töltéshordozó a *helyi* (lokális) mágneses teret érzékeli, tehát a cső belső felületének közelében mozgó töltésekre ható Lorentz-erőt a $B_{\text{belül}}$ indukcióból, a külső felület közelében mozgó töltésekre ható erőt pedig a $B_{\text{kívül}} = 0$ indukcióból kell kiszámolnunk.

Mivel $d \ll r$, feltételezhetjük, hogy a mágneses indukció egyenletesen (lineárisan) változik a cső sugara mentén, és a Lorentz-erőt számolhatjuk a külső és belső oldali mágneses indukciók

$$B = B_{\text{átlag}} = \frac{B_{\text{belül}} + B_{\text{kívül}}}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

átlagértékéből. (Később megmutatjuk, hogy az átlagos térerősségből számolt eredmény akkor is helyes, ha a mágneses indukció változása nem lineáris.)

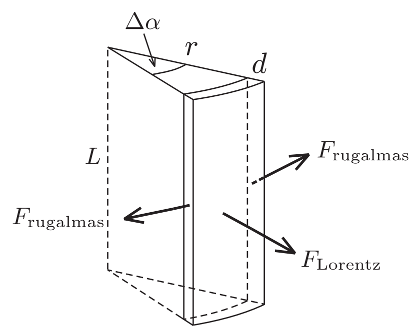


1. ábra

Tekintsük a feladatban szereplő „végtelen hosszú” elrendezésnek valamekkora L hosszúságú részét (*1. ábra*), és vizsgáljuk ezen részben a fémcső egy kicsiny, a cső tengelyétől nézve $\Delta\alpha$ szögben látszó darabkáját (*2. ábra*)! Ebben a darabkában a csőben folyó teljes áram arányos töredéke, tehát $\Delta I = I \cdot \dfrac{\Delta\alpha}{2\pi}$ nagyságú áram folyik. Így – az átlagos mágneses indukcióval számolva – a csődarabkára

(1)
$$F_{\text{Lorentz}} = B_{\text{átlag}} \cdot \Delta I \cdot L = \frac{\mu_0 I^2 L}{8\pi^2 r} \Delta\alpha$$

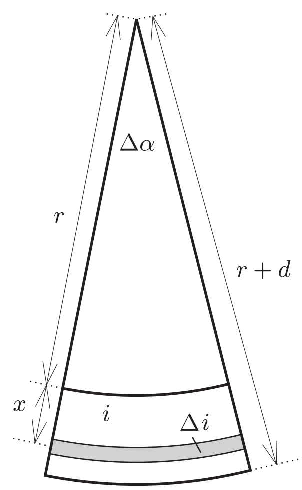
nagyságú, sugár irányban kifelé mutató erő hat. (Az erő irányát a jobbkézszabály ismételt alkalmazásával, vagy az ellentétes áramirányú, párhuzamos, egyenes vezetők között ható mágneses taszítóerőből kaphatjuk meg.)



2. ábra

*

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy az átlagos mágneses indukcióval való számolás akkor is helyes, ha a cső falában az árameloszlás nem homogén (de hengerszimmetrikus).



3. ábra

Daraboljuk fel a d falvastagságú fémcsövet képzeletben sok, vékonyabb falú, közös tengelyű csőre, majd tekintsük ennek a (póréhagymára emlékeztető) csőseregnek egy $\Delta\alpha$ szöggel jellemezhető szeletét (*3. ábra*)! Az egyes csövecskékben (rétegekben) folyjon Δi áram, és egy adott réteg esetén jelöljük i-vel azt az áramot, amely a tőle befelé eső csövecskékben összesen folyik. (A cső közepén levő vezetékben az I erősségű áram az ábra síkjára merőlegesen felfelé, az i áram pedig lefelé folyik.) Egy olyan rétegben, melynek a cső belső falától mért távolsága x (nyilván $x < d \ll r$), vagyis a sugara $r + x$, a mágneses indukció (a jobbkézszabálynak megfelelően) felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányba mutat, nagysága pedig:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi(r+x)}(I-i) \approx \frac{\mu_0}{2\pi r}(I-i).$$

Válasszunk az *1. ábrán* látható módon egy L hosszúságú csődarabot, majd vegyük ennek (a *2. ábra* szerint) egy $\Delta\alpha$ nyílásszöghöz tartozó darabját. Célunk az, hogy kiszámítsuk az egyes rétegekre ható mágneses erőt, majd ezeket a teljes d szélességre összegezve megkapjuk az L hosszúságú, $\Delta\alpha$ nyílásszögű csődarabkára ható eredő Lorentz-erőt.

A hengerszimmetrikus árameloszlás miatt a vizsgált vezetőszálban nyilván $\Delta i \cdot \dfrac{d\alpha}{2\pi}$ nagyságú áram folyik. A jobbkézszabályt alkalmazva látjuk, hogy az erő sugár irányban kifelé fog mutatni, és a nagysága:

$$\Delta F = BL\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\Delta i = \frac{\mu_0 L\Delta\alpha}{4\pi^2 r}\cdot(I-i)\Delta i.$$

Ezeket az erőket kell összegezni (vagy integrálni) a cső teljes szélességére, ami az i áramerősségben 0-tól I-ig futó összegzésnek (integrálásnak) felel meg:

$$F_{\text{Lorentz}} = \sum \Delta F = \frac{\mu_0 L\Delta\alpha}{4\pi^2 r}\sum(I-i)\Delta i.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\sum(I-i)\Delta i = \sum I\Delta i - \sum i\Delta i = I\sum\Delta i - \sum\Delta\left(\frac{i^2}{2}\right) = I\cdot I - \frac{I^2}{2} = \frac{I^2}{2}\,, \qquad (2)$$

a cső teljes vastagságú, de csak $\Delta\alpha$ nyílásszögű darabkájára ható mágneses erő

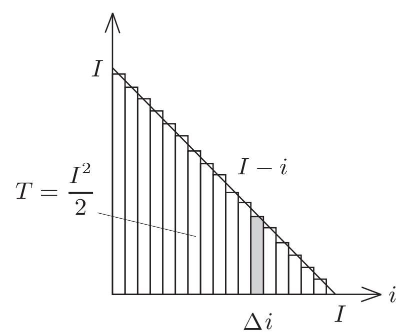
$$F_{\text{Lorentz}} = \frac{\mu_0 I^2 L \Delta\alpha}{8\pi^2 r}\,, \tag{3}$$

összhangban az átlagos mágneses indukció alapján számolt (1) képlettel.

A (2) átalakítás eredménye geometriai úton, a *4. ábrán* látható derékszögű háromszög $T = I^2/2$ területének kiszámításával, vagy az integrálszámítás formuláinak alkalmazásával is megkapható:

$$\sum (I-i)\Delta i \approx \int_0^I (I-i)\,\mathrm{d}i =$$

$$= \left[Ii - \frac{i^2}{2}\right]_{i=0}^{i=I} = \frac{1}{2}I^2.$$



4. ábra

*

Az egyes csődarabkákra ható, sugár irányban kifelé mutató mágneses erő hatására a cső sugara az eredeti r-ről valamekkora Δr értékkel megnő. Ennek következtében a cső kerülete $K = 2\pi r$-ről $K + \Delta K = 2\pi(r + \Delta r)$-ra változik, a relatív megnyúlás tehát:

$$\varepsilon = \frac{\Delta K}{K} = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}\,.$$

A Hooke-törvény szerint a cső falában (a vizsgált L hosszú, $\Delta\alpha$ szöggel jellemzett tartományban)

$$F_{\text{rugalmas}} = E \cdot \varepsilon \cdot Ld = \frac{ELd\Delta r}{r} \tag{4}$$

nagyságú, a cső keresztmetszetének érintője irányába mutató rugalmas erők ébrednek.

A rugalmas erők és a mágneses erők (lásd a *2. ábrát*) akkor vannak egyensúlyban, ha fennáll a

$$2F_{\text{rugalmas}} \cdot \sin\frac{\Delta\alpha}{2} = F_{\text{Lorentz}}$$

összefüggés, ami (3) és (4), valamint a kis szögekre érvényes

$$\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$$

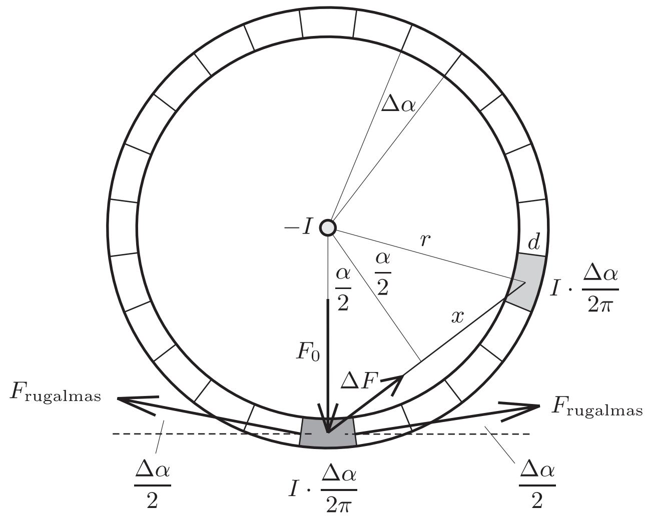
közelítés felhasználásával a

$$\Delta r = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 E d}$$

végeredményhez vezet.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a relatív deformáció kicsiny, vagyis $\Delta r \ll r$. Ha nem így lenne, a Hooke-törvény sem lenne érvényes, és a Young-modulus fogalma is használhatatlanná válna. A kicsiny sugárnövekedés miatt a mágneses Lorentz-erő számításánál a cső sugarát az eredeti, deformáció előtti r értékével közelíthettük.

II. megoldás. Osszuk fel képzeletben a fémcső L hosszúságú darabját olyan sok vékony csíkra, hogy az egyes csíkokat már – elhanyagolható vastagságú – áramvezető drótoknak tekinthessük. Számítsuk ki, mekkora erőt fejt ki az egyik kiszemelt (pl. az *5. ábra* alján sötét színezéssel jelölt) „drótra” az összes többi „vezeték”!



5. ábra

Ha a csövet N részre osztjuk ($N \gg 1$), akkor az egyes csíkok szélei a tengelytől

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$$

szögben látszanak, és a csíkokban egyenként $\frac{I}{N} = I \cdot \frac{\Delta\alpha}{2\pi}$ áram folyik. A cső közepén levő huzal (a csőben folyóval ellentétes irányú) árama a vizsgált vezetékdarabra (Ampère törvénye szerint)

$$F_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} I \left(I \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \right) \frac{L}{r}$$

nagyságú taszítóerőt fejt ki.

Másrészt a többi „csíkban” folyó, a vizsgált darabkáéval megegyező irányú áramok is erőt fejtenek ki a kérdéses (sötétre színezett) csíkra. Ez az erő vonzóerő, amely a csövet igyekszik összehúzni. Az a „vezeték”, amelyik a vizsgált csíkhoz képest α szögben elfordult helyzetben található, tehát $2x = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ távol van tőle,

$$\Delta F = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(I \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{L}{2x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(I \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{L}{2r \sin\frac{\alpha}{2}}$$

nagyságú erőt fejt ki rá. Ezeket ez erőket kell összegeznünk, ha a sötéten jelzett csíkra ható eredő erőt akarjuk meghatározni. Szimmetria-okokból a csíkok közötti vonzóerőknek csak az F_0-lal párhuzamos komponenseit kell összegeznünk (az erre merőleges összetevők kiejtik egymást). A fémcső áramának eredő hatása a vizsgált csíkban folyó áramra:

$$F_{\text{cső}} = \sum \Delta F \sin\frac{\alpha}{2} = \sum \frac{\mu_0}{2\pi} \left(I \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{L}{2r}\,.$$

Ebben az összegben csupa egyforma nagyságú összeadandó szerepel, az eredmény tehát:

$$F_{\text{cső}} = N \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \left(I \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{L}{2r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \frac{L}{2r} = \frac{1}{2} F_0.$$

A csőben folyó áram csövet összehúzó hatása tehát éppen feleakkora, mint a cső közepén levő huzalban folyó áram csövet tágító hatása.

A cső $\varepsilon = \frac{\Delta r}{r}$ relatív méretváltozása következtében a cső falában

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta r}{r}$$

rugalmas húzófeszültség alakul ki, ez a vizsgált csík „oldalainál”

$$F_{\text{rugalmas}} = \sigma L d = \frac{ELd\Delta r}{r}$$

nagyságú, érintő irányú erőket eredményez. Mivel ezen erők F_0-lal párhuzamos komponenseinek összege:

$$2F_{\text{rugalmas}} \cdot \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx F_{\text{rugalmas}} \Delta\alpha,$$

az egyensúly feltétele:

$$F_0 - F_{\text{cső}} = \frac{1}{2}F_0 = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\,\frac{I^2 L}{r}\,\Delta\alpha = \frac{ELd\Delta r}{r}\,\Delta\alpha,$$

ahonnan a cső sugarának növekedése:

$$\Delta r = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 E d}\,.$$