Megoldás. Legyenek a gráf csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$, az A_i fokszámát jelölje a_i. Az A_i-vel szomszédos csúcsok halmaza $\mathcal{B}_i$, az A_i-vel nem szomszédos csúcsoké pedig $\mathcal{C}_i$. A feladat feltétele szerint $\mathcal{C}_i$ minden elemének létezik szomszédja $\mathcal{B}_i$-ben. Ezért a $\mathcal{B}_i$-beli csúcsok fokszámának összege legalább $|\mathcal{B}_i| + |\mathcal{C}_i| = n - 1$. Ezeket az értékeket $i = 1$-től n-ig összegezve legalább $n(n-1)$-et kapunk. Ebben az összegben minden csúcs annyiszor szerepel, amennyi a foka, így

$$n^2 - n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq n(n-1).$$

Mivel itt egyenlőség van, valamennyi becslésben egyenlőség teljesül, azaz minden $\mathcal{C}_i$-beli csúcsnak pontosan egy $\mathcal{B}_i$-beli szomszédja van, és semelyik két $\mathcal{B}_i$-beli csúcs nincs egymással összekötve. Ez úgy is fogalmazható, hogy a gráf tetszőleges csúcsának semelyik két szomszédja között nem halad él. Ebből következik, hogy a gráf nem tartalmaz 3-hosszúságú kört. Így azonban 4-hosszúságú kör sem lehet benne. Ha ugyanis A_1, A_2, A_3, A_4 egy ilyen kör csúcsai az összekötés sorrendjében, akkor – 3-hosszúságú kör nem lévén – $A_3 \in \mathcal{C}_1$, $A_2, A_4 \in \mathcal{B}_1$, és A_3-nak két szomszédja is van $\mathcal{B}_1$-ben: A_2 és A_4, ami ellentmondás. A legrövidebb kör hossza tehát legalább 5. Ha a gráf egyetlen 5-hosszúságú kör, akkor teljesül a feladat valamennyi feltétele; a legrövidebb kör hossza tehát lehet 5. Megmutatjuk még, hogy a legrövidebb kör sosem lehet 5-nél hosszabb. Egy 5-nél hosszabb legrövidebb $A_1 A_2, \ldots, A_{k-1} A_k$ $(k \geq 6)$ körben ugyanis például az egymással össze nem kötött A_1 és A_4 csúcsoknak nincs közös szomszédja; ha ugyanis P mindkettőjükkel össze lenne kötve, akkor $A_1 A_2 A_3 A_4 P$ 5-hosszúságú kör lenne, ami ellentmondás. Így viszont a gráf nem teljesítené a feladat egyik feltételét.

A legrövidebb kör hossza tehát csakis 5 lehet.