I. megoldás. Tudjuk, hogy bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért a szögek különbségei ugyanolyan előjelűek, mint a velük szemközti oldalak négyzeteinek különbségei. Tehát $(\alpha-\beta)\big(a^2-b^2\big) \ge 0$, $(\beta-\gamma)\big(b^2-c^2\big) \ge 0$ és $(\gamma-\alpha)\big(c^2-a^2\big) \ge 0$. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva, majd rendezve kapjuk, hogy

$$0 \le (\alpha-\beta)\big(a^2-b^2\big) + (\beta-\gamma)\big(b^2-c^2\big) + (\gamma-\alpha)\big(c^2-a^2\big),$$

$$(\alpha+\beta)c^2 + (\gamma+\alpha)b^2 + (\beta+\gamma)a^2 \le 2\alpha a^2 + 2\beta b^2 + 2\gamma c^2.$$

Mindkét oldalhoz $\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big)$-et adva, és felhasználva, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, kapjuk, hogy

$$\pi\big(a^2+b^2+c^2\big) \le 3\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big).$$

Ebből adódik a bizonyítandó

$$\frac{\pi}{3} \le \frac{\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

alsó becslés.

A felső becslés bizonyításához azt használjuk fel, hogy hegyesszögű háromszög bármely két oldalának négyzetösszege nagyobb, mint a harmadik oldal négyzete. Ezért $\alpha\big(b^2+c^2-a^2\big) > 0$, $\beta\big(a^2+c^2-b^2\big) > 0$ és $\gamma\big(a^2+b^2-c^2\big) > 0$. Ezt a három egyenlőtlenséget összeadva, majd rendezve kapjuk, hogy

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2 < (\alpha+\beta)c^2 + (\gamma+\alpha)b^2 + (\beta+\gamma)a^2.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big)$-et és használjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$:

$$2\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big) < \pi\big(a^2+b^2+c^2\big).$$

Ismét keresztbeosztással adódik a bizonyítandó

$$\frac{\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2}{a^2+b^2+c^2} < \frac{\pi}{2}$$

felső becslés.

Az is következik a bizonyításból, hogy az alsó becslésnél pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos, a felső becslésnél pedig semmilyen háromszög esetén nincs egyenlőség.

II. megoldás. Mivel a háromszög hegyesszögű, ezért $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$ és $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Tehát

$$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2 < \frac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

amiből osztással azonnal adódik a felső becslés.

Mivel a vizsgált kifejezésben szimmetrikus a szögek szerepe, ezért feltehetjük, hogy $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Ekkor $a \ge b \ge c$ is fennáll, mert nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. A rendezett sorozatokból készített szorzatok összegére vonatkozó tétel szerint ekkor

$$\beta a^2+\gamma b^2+\alpha c^2 \le \alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2,$$
$$\gamma a^2+\alpha b^2+\beta c^2 \le \alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2.$$

E két egyenlőtlenséget összeadva és a kapott egyenlőtlenség mindkét oldalához $\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big)$-et adva kapjuk, hogy

$$(\alpha+\beta+\gamma)\big(a^2+b^2+c^2\big) \le 3\big(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2\big).$$

Ebből felhasználva, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, adódik a bizonyítandó

$$\frac{\pi}{3} \le \frac{\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

alsó becslés. Az is látszik, hogy egyenlőség csak szabályos háromszög esetén áll fenn.